Exercícios de Análise Matemática I

Diferenciabilidade

38. Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, sendo:

    (a) $f(x) = 5x - x^2$ e $a = 4$;

    (b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $a = -2$.

    Faça um esboço dos gráficos das funções e das tangentes determinadas.

39. Determine os pontos onde a tangente ao gráfico de:

    (a) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ é horizontal;

    (b) $f(x) = -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x)$ é horizontal;

    (c) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)$ é paralela à recta $y = \frac{1}{3}x + 3$.

40. Determine, caso existam, os valores de c para os quais a tangente ao gráfico de
$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$
no ponto $(c, f(c))$ é paralela à recta que passa pelos pontos $(1, f(1))$ e $(3, f(3))$.

41. Considere a função polinomial
$$e(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$
Determine a equação da recta tangente ao gráfico de e no ponto de abcissa zero. Averigúe a possibilidade da existência de rectas tangentes ao gráfico de e com declive nulo.

42. Exercício análogo ao anterior, considerando agora a função
$$s(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

43. Considere a função $f(x) = x|x|$ ($x \in \mathbb{R}$). Estude a diferenciabilidade de f indicando o domínio e a expressão da função derivada.
Resolva a mesma questão, considerando agora a função $g(x) = |x^2 - x|$.

44. Considere a função f real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{x}{2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em todo o seu domínio.

(b) Mostre que f é diferenciável e que $f'(0) = 1/2$.

(c) Existe alguma vizinhança do ponto 0 onde f seja monótona crescente?

(d) Verifique se f' é contínua no ponto 0.

45. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{se } x < 0 \\ ax + b, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

é diferenciável no ponto 0 qualquer que seja o valor de $a \in \mathbb{R}$ desde que b seja igual a 1.

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}$, também o é a função

$$g(x) = \log(2 + \sin(f(x))) \, .$$

46. Calcule a derivada das seguintes funções, sem se preocupar com os conjuntos em que estão definidas e em que são diferenciáveis.

(a) $f_1(x) = (x^2 + 1)^{2007}$;

(b) $f_2(x) = \tan(x) e^{(x^3+1)^5}$;

(c) $f_3(x) = \dfrac{\arctan(x^{\frac{1}{3}})}{\log(x)}$;

(d) $f_4(x) = \log(\log(x))$;

(e) $f_5(x) = \sin(2^x)\arccos(\log(x))$;

(f) $f_6(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

(g) $f_7(x) = x^x \log\left(\dfrac{2}{x}\right)$;

(h) $f_8(x) = \dfrac{\sin(\cos(x))}{\sin(x)}$;

(i) $f_9(x) = \cosh^2(3x+2) - \sinh^2(3x+2)$;

(j) $f_{10}(x) = x^2 \log_2(\sqrt{\cos(x)\arccos(x^2+e^x)})$;

(k) $f_{11}(x) = \sin(\sqrt{\log(\tan(e^{(x+3)^2}))})$;

(l) $f_{12}(x) = \sin(x)|\sin(x)|$.

47. Determine a expressão geral para a derivada de ordem n das seguintes funções:

(a) $\sin(2x)$ (b) xe^x (c) $x\log(x+1)$.

48. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

(a) Indique os intervalos de monotonia de f.

(b) Determine um intervalo fechado no qual os extremos absolutos da restrição de f são atingidos no interior do intervalo.

(c) Faça um esboço do gráfico de f.

49. Analise o comportamento das seguintes funções, indicando o seu domínio de definição, os pontos de continuidade e os pontos onde é possível prolongar a função por continuidade, os pontos de diferenciabilidade as assímptotas horizontais e verticais (caso existam), os intervalos de monotonia, os pontos estacionários e os extremos relativos, o sentido das concavidades e os pontos de inflexão, o contradomínio e os extremos absolutos.

(a) $g_1(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;

(b) $g_2(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$;

(c) $g_3(x) = x\log(x)$;

(d) $g_4(x) = \log(1 + x^2) - \arctan(x)$;

(e) $g_5(x) = e^{-x^2}$;

(f) $g_6(x) = x\tan(x)$ (considere a função restrita ao intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$) .

50. Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\,x^2 - 4\,x + 5}{(x-1)^2}, & \text{se } x < 2 \\ x + 3, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Determine o domínio de f;

(b) Estude f quanto à continuidade;

(c) Estude f quanto à derivabilidade;

(d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f;

(e) Determine os pontos de inflexão e as concavidades de f.

51. Considere a função polinomial $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$. Determine uma condição sobre a e b que implique o crescimento estrito de p.

52. (a) Mostre que, de entre todos os rectângulos de área 1, o quadrado é aquele que tem o menor perímetro.

(b) Mostre que, de entre todos os rectângulos inscritos no círculo trigonométrico, o quadrado é aquele que tem maior área.

53. Pretende-se construir um depósito de forma cilíndrica com volume unitário, sem tampa, de modo a minimizar a sua superfície exterior. Determine as dimensões do depósito, isto é, o valor do raio da base r e da altura h.

54. Considere a função

$$p(t) = \frac{1}{1 + 2e^{-t}}, \qquad t \in [0, +\infty[.$$

(a) Verifique que p é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que satisfaz a relação

$$p'(t) = p(t)(1 - p(t))\,.$$

(b) Admitindo que $p(t)$ modela (percentualmente) o número de indivíduos de uma população como função do tempo, interprete o valor de $p'(t)$. Identifique o instante t_N em que ocorre o maior número de nascimentos.

55. Prove que a equação $x^3 + 3x - 1 = 0$ tem uma única solução α em $\mathbb{R}$ e que $\alpha \in]0, 1[$.

56. Mostre que a equação

$$3^x + 4^x = 5^x$$

admite exactamente uma solução real.

57. Seja f uma função duas vezes diferenciável tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(2) = 2$. Mostre a existência de $x_0 \in]0, 2[$ tal que $f''(x_0) = 0$.

58. (a) Justifique, utilizando o Teorema de Rolle, a existência de dois pontos estacionários para a função $\sin(x)$ no intervalo $]0, 2\pi]$.

    (b) Considere uma função f, diferenciável em $\mathbb{R}$, periódica de período T. Justifique a existência de pelo menos dois pontos estacionários no intervalo $]0, T]$.

59. Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x^2 + x$. Verifique que f está nas condições do Teorema de Lagrange e determine o valor intermédio c nele referido.

60. Suponha f contínua em $V_\epsilon :=]a - \epsilon, a + \epsilon[$ e diferenciável em $V_\epsilon \backslash \{a\}$. Suponha ainda que existe o seguinte limite

$$\lim_{x \to a} f'(x) = L\,.$$

Justifique, utilizando o Teorema de Lagrange, que f é diferenciável em a, sendo

$$f'(a) = L\,.$$

61. Para cada uma das seguintes funções, estude a continuidade, determine as derivadas laterais da função no ponto c indicado e verifique se a função é diferenciável em c. Interprete geometricamente os resultados obtidos.

(a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x^3 + 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e $c = 1$.

(b) $g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \leq -1 \\ (x+1)^2, & \text{se } x > -1 \end{cases}$ e $c = -1$.

(c) $h(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{se } x \leq 2 \\ 2x - 2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$ e $c = 2$.

62. Considere a seguinte função definida por ramos

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(2x) + x, & \text{se } x < 0 \\ \tan(2x) + \log(1 + x), & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{4}\,. \end{cases}$$

Estude a diferenciabilidade de f em zero. (Sugestão: utilize o resultado do exercício 60.)

63. Mostre que, para todo o $x > 0$:

(a) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$;

(b) $\dfrac{x}{1+x} < \log(1 + x) < x$;

(c) $x - \dfrac{x^3}{6} < \operatorname{sen}(x) < x$;

(d) $e^x > 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{1}{n!}x^n$ (Sugestão: utilize o Princípio de Indução Matemática).

64. Justifique as afirmações verdadeiras e apresente um contra-exemplo para as falsas.

(a) Toda a função contínua é limitada.

(b) Se f é diferenciável então é contínua.

(c) Se f e g são crescentes, então $f + g$ e $f - g$ são crescentes.

(d) Se f e g são crescentes, então fg e f/g (onde g não se anula) são crescentes.

(e) Se f e g têm concavidade voltada para cima, então $f + g$ e fg têm concavidade voltada para cima.

(f) Se f tem um extremo absoluto no ponto a então f^2 também.

(g) Se f crescente, então f^2 é crescente.

(h) Se f tem um extremo local num ponto a, então $f'(a) = 0$.

(i) Se $f'(a) = 0$, então f tem um extremo local no ponto a.