Exercícios de Análise Matemática I

Sucessões

9. De entre as seguintes sucessões, definidas pelo seu termo geral, indique quais são majoradas, minoradas ou limitadas:

   (a) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$; (b) $b_n = (-1)^n n^2$;

   (c) $c_n = n^{(-1)^n}$; (d) $d_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.

10. Considere a sucessão $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recorrência

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2}\,, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

   (a) Utilizando a indução matemática, mostre que $0 < u_n < 2\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   (b) Prove que a sucessão é monótona crescente.

11. Considere a sucessão
$$u_n = \frac{(-1)^{3n}}{\sqrt{n}}\,.$$
   Indique, justificando, quais das seguintes sucessões são subsucessões de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

   (a) $\frac{1}{\sqrt{2n}}$;
   (b) $\frac{1}{\sqrt{n}}$;
   (c) $-\frac{1}{\sqrt{n}}$;
   (d) $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

12. Em cada uma das alíneas seguintes, indique uma ordem $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$ se verifique:

   (a) $\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < 10^{-5}$;
   (b) $\left|\frac{e^n+2}{e^n} - 1\right| < 10^{-5}$;
   (c) $\left|\frac{1}{n^2+n}\right| < 10^{-5}$;
   (d) $e^{n^2} > 10^5$.

13. Utilizando a definição de convergência de uma sucessão, prove que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{e^n+2}{e^n} = 1\,, \quad \lim_{n\to\infty} e^{n^2} = +\infty\,.$$

Indique o valor do limite da sucessão $u_n = \dfrac{-n^2-n+1}{n^2+n}$. Utilizando a defiição de sucessão convergente, prove a sua validade.

14. Determine, se existirem, os limites das sucessões de termo geral:

$$a_n = \frac{2n+3}{3n-1}; \qquad b_n = \frac{n^2-1}{n^4+3};$$

$$c_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}-1}; \qquad d_n = \cos(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}; \qquad f_n = \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2};$$

$$g_n = \sqrt{(n+1)!-n!}; \qquad h_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+1}(\sqrt{n}+1)}{3n\sqrt[6]{n+1}};$$

$$i_n = \frac{\sqrt{n^2+5}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[n]{2n^3+n^2+\frac{n}{2}}}; \qquad j_n = \sqrt[2n]{n};$$

$$k_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}; \qquad l_n = \sqrt{n^2+5n}-n;$$

$$m_n = \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{2n}; \qquad \overline{m}_n = \left(\frac{2n+1}{4n+4}\right)^{3n};$$

$$o_n = 2^{2n+1}\left(\frac{n+2}{4n+1}\right)^{n}; \qquad p_n = n\sqrt[n]{\frac{1}{2^{3n}n!}};$$

$$q_n = \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}}; \qquad r_n = \sqrt{n}\sin\sqrt{\frac{1}{n}};$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}; \qquad t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^2 n}{5n^3+k}.$$

15. Indique, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras:

   (a) Se o conjunto dos termos de uma sucessão não tem máximo, a sucessão é divergente.

   (b) Se o conjunto dos termos de uma sucessão não tem supremo, a sucessão é divergente.

   (c) Se para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem $u_n > 0$ e se $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ então a sucessão $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente a partir de uma certa ordem.

16. Dê um exemplo de uma sucessão cujo conjunto dos sublimites seja:

$$\text{(a)}\,\{3,4\}\,; \qquad \text{(b)}\ \mathbb{N}; \qquad \text{(c)orajosos:}\,\mathbb{R}\,.$$

17. Considere a sucessão $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   (a) Num referencial ortonormado represente as rectas Δ e D, de equações $y = \frac{1}{2}x + 2$ e $y = x$, respectivamente.
   Represente no eixo das abcissas os termos u_1, u_2, u_3 e u_4 da sucessão. O que pode conjecturar?

   (b) Prove que a sucessão de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e majorada por $M = 4$.

   (c) Determine h tal que a sucessão de termo geral $v_n = u_n + h$ seja geométrica. Deduza o valor de

$$l = \lim_{n\to\infty} u_n.$$

   (d) Calcule o valor de l por um método distinto do utilizado na alínea anterior.

18. Considere as sucessões de números reais definidas por

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 3}{6}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

e

$$v_n = 5u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Mostre que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão geométrica.
(b) Deduza a expressão analítica de $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Calcule o limite de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

19. Considere a sucessão de números reais positivos definida por recorrência por

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

(a) Utilizando a indução matemática, mostre que $4 < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(b) Prove que a sucessão é convergente e determine o valor do seu limite.

20. Considere o conjunto $\mathcal{S}$ das sucessões reais que verificam a seguinte propriedade:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

(a) Dê o exemplo de duas sucessões geométricas $\{\alpha^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\beta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que pertençam a $\mathcal{S}$.

(b) Dadas duas constantes reais λ e μ, mostre que a sucessão $\{\lambda\alpha^n + \mu\beta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a $\mathcal{S}$.

(c) Determine o termo geral da sucessão $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pertencente a $\mathcal{S}$, tal que $u_1 = 2$ e $u_3 = 1$.

21. Considere os pontos do plano euclidiano $A_1 = (2,0)$ e $A_2 = (0,1)$. Considere a sucessão de pontos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ do plano euclidiano definida da seguinte forma:
A_3 é o ponto médio de A_1 e A_2;
A_4 é o ponto médio de A_2 e A_3;
...
$\forall n \geq 2,\ A_{n+1}$ é o ponto médio de A_n e A_{n-1}.

Inspirando-se no exercício 20., calcule explicitamente as coordenadas do ponto A_n. Para que ponto tende no plano a sucessão $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

22. Considere a sucessão L_n correspondendo ao número máximo de regiões do plano euclideano que conseguimos delimitar com n rectas.

(a) Verifique que $L_0 = 1$, $L_1 = 2$, $L_2 = 4$ e $L_3 = 7$.

(b) Observe que L_n é dado pela seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + n \end{cases} .$$

(c) Conclua que

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 .$$