

Exercícios de Análise Matemática I

Regra de Cauchy e Fórmula de Taylor

65. Calcule os seguintes limites por um método à sua escolha (regra de Cauchy, expansão de Taylor ou reconhecendo a definição de uma derivada).

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x + e^x)}{x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 2x^2)}{x^2}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{x}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)} \right)$
- (h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\log(x)}$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)^{1/x}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}$

66. Verifique que não é possível calcular o seguinte limite através da regra de Cauchy, e determine-o directamente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)}.$$

67. Qual o erro cometido no cálculo do seguinte limite, onde foi usada sucessivamente a regra de Cauchy?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{2} = 3$$

68. Determine um polinómio $P(x)$ de grau 2 tal que $P(1) = 3$, $P'(1) = -2$ e $P''(1) = 4$.
69. Desenvolva o polinómio $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ em potências inteiras de $x - 2$.
70. Escreva a fórmula de MacLaurin, com resto de ordem 3, para as seguintes funções

$$f(x) = xe^x, \quad g(x) = \ln(\cos(x)).$$

71. Escreva a fórmula de Taylor, para as seguintes funções:

- (a) $f(x) = \log(1 + x^2)$, com potências de x e resto de ordem 3;
- (b) $f(x) = \cos(x)$, com potências de $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ e resto de ordem 2;
- (c) $f(x) = x \sin(2x)$, com resto de ordem 2, no ponto $x_0 = 0$;
- (d) $f(x) = \frac{e^x \sinh(x)}{1+x^2}$, com resto de ordem 3, no ponto $x_0 = 0$;
- (e) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$, com resto de ordem 4, no ponto $x_0 = 0$;
- (f) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, com resto de ordem 5, no ponto $x_0 = 1$.

Esboce o gráfico de cada uma destas funções numa vizinhança do ponto considerado, prestando particular atenção à sua posição relativamente à recta tangente.

72. Calcule, usando a expansão de Taylor de ordem 3, valores aproximados de:

- (a) $\sqrt{98}$;
- (b) $2^{5.1}$;
- (c) $\arctg(1.05)$.

73. Com o auxílio da expansão de Taylor, calcule os seguintes limites e indique se são atingidos por valores superiores, inferiores ou nenhum dos casos anteriores.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \operatorname{sen}(x)}{x^5}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin(x)}}{x^3}$$

74. Utilize a fórmula de Taylor para estabelecer as seguintes desigualdades:

$$(a) \cos(x) > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[,$$

$$(b) \frac{1}{1+\log(x)} < 1 - (x-1) + 3 \frac{(x-1)^2}{2}, \quad \forall x > 1 .$$