# Exercícios de Análise Matemática I

*Topologia e Indução Matemática*

1. Indique se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são majorados, minorados ou limitados. Indique ainda, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um desses conjuntos.

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : |x-3| = 2|x|\}$;
   (b) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^{-1}}{x} < \frac{x}{x^{-1}}\right\}$;
   (c) $\left\{x \in \mathbb{R} :\ x = \sin\left(\frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}\right\}$;
   (d) $\{x \in \mathbb{R} :\ x = \log(n), n \in \mathbb{N}\}$.

2. Determine o interior, a fronteira e o derivado dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Indique quais são abertos e quais são fechados.

   (a) $[0,2[\cup]3,5[\cup\{6,7\}$;
   (b) $\{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq x\}$;
   (c) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$;
   (d) $\{x \in \mathbb{R} : |x-1| \geq |x|\}$;
   (e) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 > x\}$;
   (f) $\left\{x = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}\ :\ n \in \mathbb{N}\right\}$;
   (g) $\left\{x = m + \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$;
   (h) $(\{x = \cos(n\pi/3) \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{Q}) \cup ]-2,-1[$.

3. Quando possível, dê um exemplo de um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que:

   (a) seja finito e aberto;
   (b) seja fechado e não limitado;
   (c) seja igual ao seu derivado;
   (d) tenha por exterior um intervalo limitado;

(e) seja aberto e fechado.

Sempre que adequado, justifique a inexistência de um subconjunto com as características pedidas.

4. Sentados no Parnasso, Euclides e Zenão debatem. Afirma Euclides: "O intervalo $[0, 1[$ não possui máximo, posto que o supremo deste intervalo é 1. Ora $1 \notin [0, 1[$." Rebate Zenão: "Como estais enganado, meu caro. Vede:
$$0,9999999999.....$$
pertence a $[0, 1[$ e é maior que cada um dos elementos deste intervalo." Quem fala verdade?

5. Considere o seguinte conjunto:
$$F = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - 5x + 9 > 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x - 1 \leq 7\}.$$
(a) Determine o interior, o exterior e a fronteira de $F$.
(b) Determine a aderência, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de $F$.
(c) Indique, justificando, se $F$ é aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.

6. Considere o seguinte conjunto:
$$H = \left\{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 < 9\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \,:\, x^2 - 2x - 5 \leq 0\right\}.$$
(a) Determine o interior, o exterior e a fronteira de $H$.
(b) Determine a aderência, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de $H$.
(c) Determine, se existirem, o conjunto dos majorantes, o supremo, o máximo, o conjunto dos minorantes, o ínfimo e o mínimo de $H$.

7. Prove por indução matemática as seguintes propriedades:

$\forall n \in \mathbb{N}$,

(a) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n^2 + n$;
(b) $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = n$;
(c) $\sum_{k=1}^{n} k k! = (n + 1)! - 1$;
(d) $n \geq 4 \Rightarrow n! > 2^n$;
(e) $\sum_{j=1}^{n} j^2 < (n + 1)^3$;

(f) $(1+k)^n \geq 1+nk$ para $k \in [-1, +\infty[$ ;

(g) $9^n - 1$ é múltiplo de 8.

8. Considere a função definida em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ pela expressão:

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

(a) Calcule $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$ e $f^{(3)}(x)$.
(b) Conjecture a fórmula para a n-ésima derivada $f^{(n)}(x)$ da função $f$. Certifique-se da sua correção fazendo a respectiva prova utilizando indução matemática.