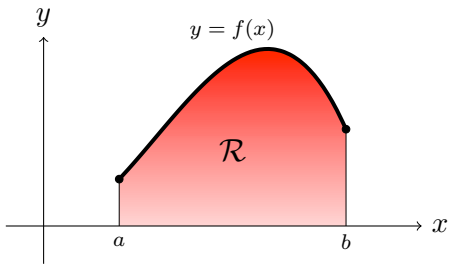
1.7 Cálculo integral

Motivação

Consideremos uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f \geq 0$ em $[a, b]$. Pretende-se calcular a área da região $\mathcal{R}$ delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos xx,

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x) \ \right\},$$

que se encontra assinalada na seguinte figura.



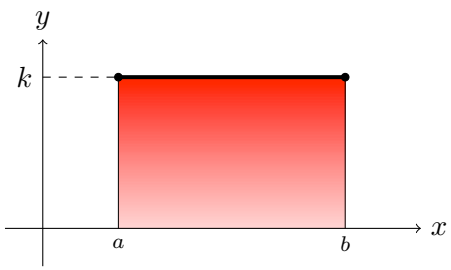
Designamos esta área por **integral de f em** $[a, b]$, que denotamos por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

A função f designa-se por **função integranda**.

Exemplos

1. Se f é a função constante de valor k, o valor da área é $k(b - a)$,



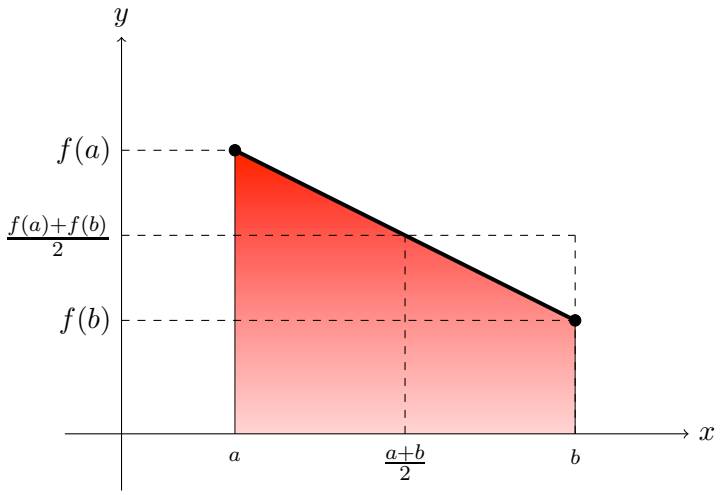
Portanto,

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a).$$

2. Mais geralmente, se f é uma função linear o valor da área é

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a),$$

como se pode constatar imediatamente na seguinte figura.



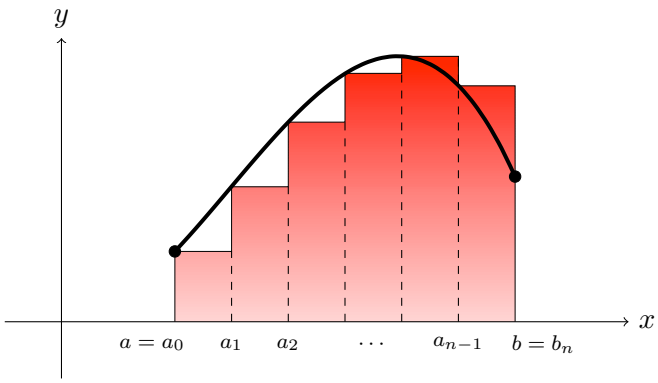
Portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

- Podemos estender a noção de integral para funções contínuas f que tomam valores positivos e negativos. Nessa altura, define-se integral de f em $[a,b]$ como sendo a diferença entre os valores das áreas das regiões delimitadas pelo gráfico de f e pelo o eixo dos xx, que se encontram acima e abaixo do eixo dos xx, respectivamente.

Fórmula fundamental do cálculo integral

O cálculo do valor da área delimitada pelo gráfico de uma função contínua $f \geq 0$ e pelo eixo dos xx não é trivial. Podemos no entanto obter um valor aproximado dessa área subdividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de igual amplitude h, $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$, com $a_{i+1} = a_i + h$, de forma a que f seja aproximadamente constante de valor $f(a_i)$ em $[a_i, a_{i+1}]$.



Nessa altura, um valor aproximado da área é dado pela soma das áreas dos n rectângulos, de base h e alturas $f(a_0)$, $\ldots$, $f(a_{n-1})$, isto é, pela expressão

$$f(a_0)\,h + f(a_1)\,h + \cdots + f(a_{n-1})\,h = (f(a_0) + f(a_2) + \cdots + f(a_{n-1}))\;h.$$

Intuitivamente a aproximação será tanto melhor quanto mais pequeno for a amplitude h dos subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$, tendo-se que a soma anterior converge para a área quando $h \to 0$.

Por outro lado, se considerarmos uma primitiva F de f, obtém-se atendendo à definição de derivada,

$$f(a_i) = F'(a_i) = \lim_{h \to 0} \frac{F(a_i + h) - F(a_i)}{h}.$$

Se h é suficientemente pequeno, vem

$$f(a_i) \approx \frac{F(a_i+h)-F(a_i)}{h} = \frac{F(a_{i+1})-F(a_i)}{h}.$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
& (f(a_0)+f(a_1)+\cdots+f(a_{n-1}))\ h \\
\approx\ & \left(\frac{F(a_1)-F(a_0)}{h}+\frac{F(a_2)-F(a_1)}{h}+\cdots+\frac{F(a_n)-F(a_{n-1})}{h}\right) h \\
=\ & F(a_1)-F(a_0)+F(a_2)-F(a_1)+F(a_3)-F(a_2)+\cdots \\
& \cdots+F(a_{n-2})-F(a_{n-3})+F(a_{n-1})-F(a_{n-2})+F(a_n)-F(a_{n-1}).
\end{aligned}$$

Na expressão anterior cada parcela $F(a_i)$ aparece duas vezes e com sinais opostos, com excepção das parcelas $-F(a_0)$ e $F(a_n)$ que só figuram uma vez. Logo,

$$(f(a_0)+f(a_1)+\cdots+f(a_{n-1}))\ h \approx -F(a_0)+F(a_n) = F(b)-F(a).$$

Esta aproximação será tanto melhor quanto mais pequeno for a amplitude h dos subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$. Pode-se provar que no limite, quando $h \to 0$, se obtém mesmo uma igualdade. Atendendo às considerações anteriores, concluímos finalmente que

$$\text{Área da região } = F(b)-F(a).$$

Obtivemos assim uma fórmula surpreendente que relaciona dois conceitos aparentemente desconexos, a saber, o conceito de integral que envolve a noção de área e o conceito de primitiva, que envolve a noção de derivada. Esta fórmula é conhecida por **fórmula fundamental do cálculo integral** (ou **fórmula de Barrow**).

As conclusões anteriores mantêm-se válidas se f tomar valores positivos e negativos.

Tem-se então o seguinte resultado.

Teorema Sejam $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : I \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f. Então

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemplos

1. $\displaystyle\int_a^b k\,dx = k\int_a^b 1\,dx = k[x]_a^b = k(b-a).$

2. $\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$

3. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_2^6 \sqrt{x+1}\,dx.$

   Recordemos que $P\, f' f^\alpha = \dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$. Assim,

   $$\begin{aligned}\int_2^6 \sqrt{x+1}\,dx &= \int_2^6 (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^6 \\ &= \frac{2}{3}\Big[(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_2^6 = \frac{2}{3}(7^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}).\end{aligned}$$

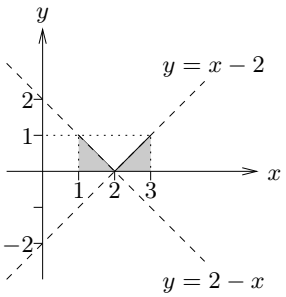
4. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_1^3 e^{-x}dx.$

   Recordando que $P\,(f' e^f) = e^f$, vem

   $$\int_1^3 e^{-x}dx = -\int_1^3 -e^{-x}dx = -\left[e^{-x}\right]_1^3 = -(e^{-3} - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-3}.$$

5. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_1^3 |2-x|\,dx.$

   Tem-se $|2-x| = \begin{cases} 2-x, & 2-x \geq 0 \\ x-2, & 2-x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \\ x-2, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$



Assim

$$\begin{aligned}\int_1^3 |2-x|\,dx &= \int_1^2 (2-x)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx \\ &= \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 \\ &= (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} - 6\right) - (2-4) = 1.\end{aligned}$$

6. Pretende-se calcular $\int_1^e \ln x\,dx$.

Primitivando por partes vem

$$P\,1 \cdot \ln x = x\,\ln x - P\,x\,\frac{1}{x} = x\,\ln x - x = x(\ln x - 1),$$

e portanto,

$$\int_1^e \ln x\,dx = [x(\ln x - 1)]_1^e = e(1-1) - (-1) = 1.$$

7. Pretende-se calcular $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

Recordando que $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ e que $P\,f'\,f = \frac{1}{2}f^2$ obtemos

$$P\,\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = P\,\frac{1}{1+x^2}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x.$$

Portanto,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}^2 x\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}^2 1 - \operatorname{arctg}^2 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}.$$

8. Pretende-se calcular $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)}$.

   Recordando que $P\frac{f'}{f} = \ln|f|$,

$$P\,\frac{1}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)} = P\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctg} x} = \log|\operatorname{arctg} x|,$$

   e portanto,

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)} &= \Big[\log|\operatorname{arctg} x|\Big]_1^{\sqrt{3}} = \log|\operatorname{arctg}\sqrt{3}| - \log|\operatorname{arctg} 1| \\ &= \log\frac{\pi}{3} - \log\frac{\pi}{4} = \log\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

9. Pretende-se calcular, $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

   Recordando que $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, e que

$$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}}\,f' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}},$$

   vem

$$P\,\frac{x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}P\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x^2,$$

   e portanto,

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arcsen} x^2\Big]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} - \operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\right) = 0.$$

10. Pretende-se calcular, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4}$.

    A função $\frac{1}{x^2-4}$ é uma função racional própria pois é um quociente de dois polinómios, sendo que o grau do denominador superior ao do numerador. O polinómio x^2-4 tem duas raízes simples $-2, 2$ e portanto admite a factorização $x^2-4 = (x+2)(x-2)$. Assim existem constantes reais A, B tais

que

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$= \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2(A-B)}{x^2-4},$$

e portanto

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2(A-B)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ 4A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{4} \\ A=\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Daqui resulta que

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4} &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}\right] dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{1}{4}\Big[\log|x-2| - \log|x+2|\Big]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{4}(\log 1 - \log 3 - \log 3 + \log 1) = -\frac{\log 3}{2}. \end{aligned}$$

Propriedades do integral

Sejam $f, g : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $c \in [a,b]$. Tem-se:

- **Linearidade do integral:**
  1. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
  2. $\int_a^b \lambda\, f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$

- **Monotonia do integral:** se $f(x) \geq g(x)$ para todo o $x \in I$ tem-se,

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\geq\; \int_a^b g(x)dx.$$

- **Aditividade do integral:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Por convenção tem-se ainda:

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0,$
- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx = 0.$

Exemplos

1. Sabendo que

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \quad \text{e que} \quad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3},$$

obtemos pelas propriedades anteriores

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x+5x^2)\,dx &= \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 5x^2\,dx \\ &= \int_0^1 x\,dx + 5\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{2}+\frac{5}{3} = \frac{13}{6}.\end{aligned}$$

2. Pretende-se comparar os integrais $\int_0^1 x^2\,dx$ e $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ sem os determinar.

Ora, como a função $\sqrt{x} \geq x^2$ em $[0,1]$, vem pela monotonia do integral que

$$\int_0^1 x^2\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{x}\,dx.$$

O que aconteceria se os integrais estivessem definidos no intervalo $[1,2]$?

Como vimos anteriormente, o valor da área da região delimitada pelo eixo dos xx e pelo gráfico de uma função contínua $f \geq 0$ num intervalo $[a, b]$, é dado por

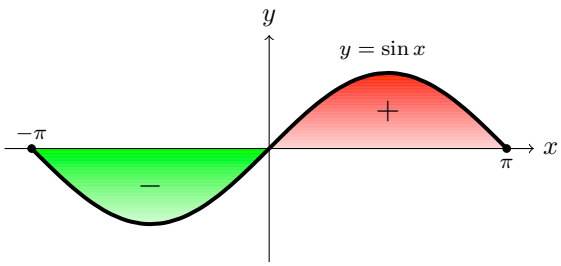
$$\int_a^b f(x)dx.$$

No caso $f \leq 0$, o integral representa o simétrico do valor da área dessa região.

Exemplo

Consideremos a função $f(x) = \sin x$ em $[-\pi, \pi]$. No intervalo $[0, \pi]$ temos $f(x) \geq 0$ e no intervalo $[-\pi, 0]$ temos $f(x) \leq 0$. As áreas em cada um dos sub-intervalos são iguais mas os integrais têm sinais contrários. Assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = \int_{-\pi}^{0} \sin x\, dx + \int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = 0.$$



Aplicações do cálculo integral

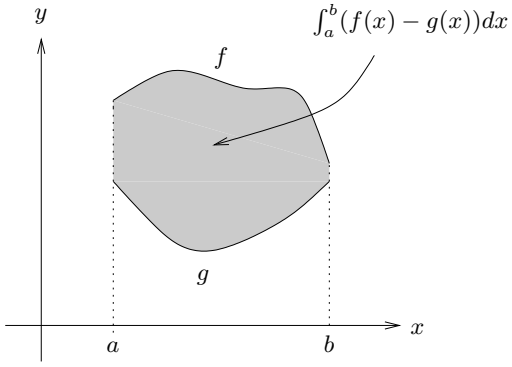
- Cálculo de áreas.
- Cálculo de volumes de sólidos de revolução.

Cálculo de áreas

Teorema Sejam $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que $f(x) \geq g(x)$ para todo o $x \in [a, b]$. A área da região

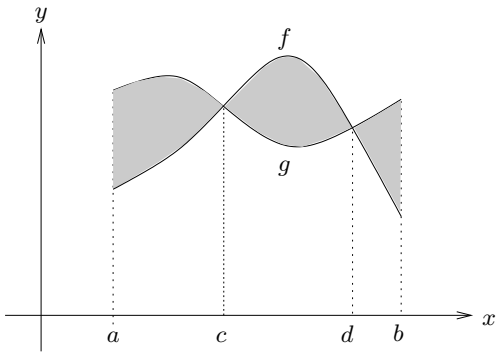
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

é dada pelo integral $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.



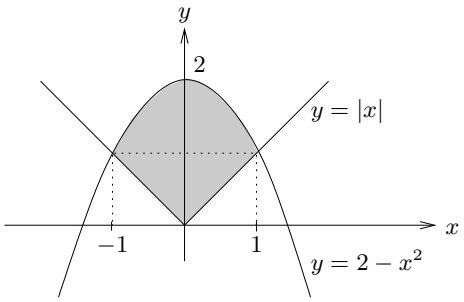
Se o sinal de $f - g$ não for constante no intervalo $[a, b]$ temos que determinar os pontos onde os gráficos de ambas as funções se intersectam e decompôr o intervalo em subintervalos onde esse sinal se mantenha constante. O valor da área será então a soma das áreas em cada um desses subintervalos. No exemplo descrito na seguinte figura a área da região assinalada vem dada pelo integral

$$\int_a^c (g(x) - f(x))\,dx + \int_c^d (f(x) - g(x))\,dx + \int_d^b (g(x) - f(x))\,dx.$$



Exemplos

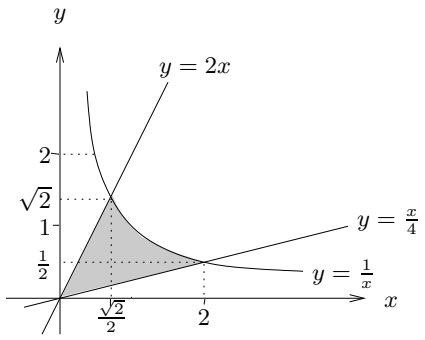
1. Calcular a área da região delimitada por $y = |x|$ e $y = 2 - x^2$.



$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_{-1}^{1}((2-x^2)-|x|)dx \\
&= \int_{-1}^{0}((2-x^2)-(-x))dx + \int_{0}^{1}((2-x^2)-x)dx \\
&= \left[2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} \\
&= -(2(-1)-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2})+(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}) = \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

2. Pretende-se calcular a área da região

$$\left\{(x,y)\ :\ 0\le y\le \frac{1}{x},\ \frac{x}{4}\le y\le 2x,\right\}.$$



Para isso necessitamos de determinar os pontos de intersecção dos gráficos de cada uma das funções. Ora, a intersecção da hipérbole $y=\frac{1}{x}$ com a recta

$y = 2x$ obtém-se resolvendo o sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ \frac{1}{x} = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ x^2 = 2. \end{cases}$$

Como $y \geq 0$ obtemos o ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$. Analogamente a intersecção da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ com a recta $y = \frac{x}{4}$ obtém-se resolvendo o sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ \frac{1}{x} = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ x^2 = 4. \end{cases}$$

Como $y \geq 0$ obtemos o ponto $(2, \frac{1}{2})$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(2x - \frac{x}{4}\right) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right) dx \\ &= \frac{7}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\log|x| - \frac{x^2}{8}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} = \cdots \end{aligned}$$

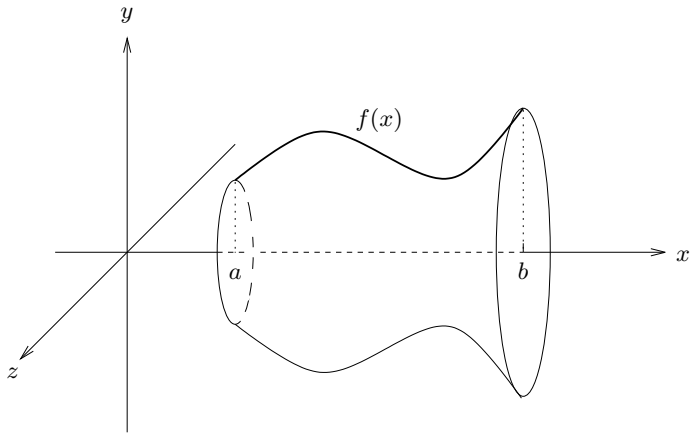
Cálculo de volumes de sólidos de revolução

Vejamos agora como calcular o *volume de sólidos de revolução* usando o integral definido.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ o sólido de revolução em torno do eixo do xx definido por f, i.e., o volume da região definida por rotação da área

$$\{(x, y) \,:\, a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\},$$

em torno do eixo do xx.

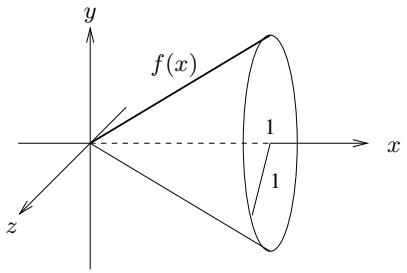


Teorema O volume do sólido de revolução definido por $y = f(x)$ é dado pela fórmula,

$$V = \int_a^b \pi\, f^2(x)\, dx.$$

Exemplo

Pretende-se calcular o volume do cone de altura $h = 1$ e cuja base é uma disco de raio $R = 1$. O cone é o sólido de revolução definido pela função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.



O volume do cone é dado por

$$V = \int_0^1 \pi\, x^2\, dx = \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$