Análise Matemática

Mais exercícios sobre a Fórmula de Taylor

- 2011 -

1. Seja $f(x) = \sin x$, $P_1(x)$ o polinómio de MacLaurin de f de ordem 1 e $R_1(x)$ o resto de Lagrange de f de ordem 1 no ponto 0.

   a) Determine $P_1(x)$. **Solução**: $P_1(x) = x$

   b) Escreva a expressão de $R_1(x)$.

   Solução: $R_1(x) = -\dfrac{\sin c}{2}x^2$ em que c está entre 0 e x

   c) Justifique que, para $0 < x \leq \pi$, o gráfico de f está abaixo da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

   Solução: $y = P_1(x)$ é a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0. $f(x) = P_1(x) + R_1(x)$; $R_1(x) < 0$ para $0 < x \leq \pi$; logo, $f(x) < P_1(x)$ para $0 < x \leq \pi$.

2. Seja $f(x) = \sin x$, $P_2(x)$ o polinómio de MacLaurin de f de ordem 2 e $R_2(x)$ o resto de Lagrange de f de ordem 2 no ponto 0.

   a) Determine $P_2(x)$. **Solução**: $P_2(x) = x$

   b) Escreva a expressão de $R_2(x)$.

   Solução: $R_2(x) = -\dfrac{\cos c}{6}x^3$ em que c está entre 0 e x

   c) Justifique que, para $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, o gráfico de f está abaixo da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

   Solução: $y = x$ é a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0. $f(x) = x + R_2(x)$; $R_2(x) < 0$ para $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$; logo, $f(x) < x$ para $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

3. Seja $f(x) = \sqrt{1+x}$, $P_1(x)$ o polinómio de MacLaurin de f de ordem 1 e $R_1(x)$ o resto de Lagrange de f de ordem 1 no ponto 0.

   a) Determine $P_1(x)$. **Solução**: $P_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x$

   b) Calcule um valor aproximado para $\sqrt{2}$, usando $P_1(x)$. **Solução**: 1.5

   c) Escreva a expressão de $R_1(x)$.

   Solução: $R_1(x) = -\dfrac{1}{8\sqrt{(1+c)^3}}x^2$ em que c está entre 0 e x

   d) Justifique que o erro cometido pela aproximação definida na alínea b) é inferior a $\frac{1}{8}$ e superior a $\frac{1}{8\sqrt{8}}$.

4. Seja $f(x) = \cos x$ e $P(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - (x - \frac{\pi}{4}))$.

   a) Justifique que $P(x)$ é um polinómio de Taylor de f.

      Solução: $P(x)$ é o polinómio de Taylor de f de ordem 1 no ponto $\frac{\pi}{4}$

   b) Indique o valor de $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{f(x) - P(x)}{x - \frac{\pi}{4}}$. **Solução**: 0

   c) Mostre que $f(x) < P(x)$, para $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4}$.

      Solução: $f(x) = P(x) - \dfrac{\cos c}{2}(x - \dfrac{\pi}{4})^2$, em que c está entre $\frac{\pi}{4}$ e x; $-\dfrac{\cos c}{2}(x - \dfrac{\pi}{4})^2 < 0$ para $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4}$; logo, $f(x) < P(x)$ para $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4}$.

5. Seja $f(x) = \ln x$, $P_3(x)$ o polinómio de Taylor de f de ordem 3 no ponto 1 e $R_3(x)$ o resto de Lagrange de f de ordem 3 no ponto 1.

   a) Determine $P_3(x)$. **Solução**: $P_3(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$

   b) Calcule um valor aproximado para $\ln 1.3$, usando $P_3(x)$. **Solução**: 0.264

   c) Escreva a expressão de $R_3(x)$.

      Solução: $R_3(x) = -\dfrac{1}{4c^4}(x-1)^4$ em que c está entre 1 e x

   d) Justifique que o erro cometido pela aproximação definida na alínea b) é inferior a $\frac{(0.3)^4}{4}$. **Solução**: $R_3(1.3) < \frac{(0.3)^4}{4}$

6. Seja $f(x) = \ln(x+1)$. Dê exemplo de dois polinómios $P(x)$ e $Q(x)$ tais que $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - P(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - Q(x)}{x^3} = 0$.

   Solução: $P(x) = x - \frac{1}{2}x^2$ e $Q(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que o polinómio de Taylor de f de ordem 2 no ponto 1 é $P_2(x) = \frac{1}{3} + (x-1) + (x-1)^2$.

   a) Determine $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$. **Solução**: $f(1) = \frac{1}{3}$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = 2$.

   b) Calcule um valor aproximado para $f(1.2)$. **Solução**: $\frac{1}{3} + 0.24$

   c) Considere $f'''(x) = 2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Determine f.

      Solução: $f(x) = \frac{1}{3} + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que o polinómio de Taylor de f de ordem 2 no ponto -1 é $P_2(x) = 3 + 5(x+1)^2$.

   a) Determine $f(-1)$, $f'(-1)$, $f''(-1)$.

      Solução: $f(-1) = 3$, $f'(-1) = 0$, $f''(-1) = 10$.

   b) Indique o valor de $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - P_2(x)}{(x+1)^2}$. **Solução**: 0

   c) Considere $f'''(x) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Determine f.

      Solução: $f(x) = P_2(x)$