# Notas sobre primitivas

Seja $f$ uma função real de variável real definida num intervalo real $I$.

Chama-se **primitiva** de $f$ no intervalo $I$ a uma função $F$ cuja derivada em $I$ seja $f$, isto é,

$$F'(x) = f(x).$$

**Exemplos:**

1. $F(x) = x^2$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$, pois
$$F'(x) = \left(x^2\right)' = 2x.$$

2. $F(x) = x^2 - 25$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$, pois
$$F'(x) = \left(x^2 - 25\right)' = 2x.$$

3. Sendo $a \in \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + a$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$, pois
$$F'(x) = \left(x^2 + a\right)' = 2x.$$

4. Sendo $a \in \mathbb{R}$, $F(x) = ax$ é uma primitiva de $f(x) = a$, pois
$$F'(x) = (ax)' = a.$$

5. $F(x) = e^x + 3$ é uma primitiva de $f(x) = e^x$, pois
$$F'(x) = (e^x + 3)' = e^x.$$

6. $F(x) = \arctan x$ é uma primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, pois
$$F'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

7. $F(x) = \ln\left(1+x^2\right)$ é uma primitiva de $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, pois
$$F'(x) = \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)' = \frac{2x}{1+x^2}.$$

8. $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$ é uma primitiva de $f(x) = x^n$, pois
$$F'(x) = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n.$$

É fácil perceber que a primitiva de uma função não é única. Basta observar os exemplos 1, 2 e 3 atrás e imaginar muitas situações análogas. As proposições seguintes caracterizam o conjunto das primitivas de uma função num intervalo.

**Proposição 1** Se, num dado intervalo, uma função $f$ tem uma primitiva $F$, então $f$ tem nesse intervalo uma infinidade de primitivas.

**Demonstração:** Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então, $\forall c \in \mathbb{R}$, $F(x) + c$ também é primitiva de $f$, pois

$$(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x). \blacksquare$$

**Proposição 2** Se, num dado intervalo $I$, $F$ e $G$ são primitivas de uma mesma função $f$, então $F$ e $G$ diferem por uma constante nesse intervalo, isto é existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) - G(x) = c$.

**Demonstração:** Como, $\forall x \in I$,

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

então $F(x) - G(x)$ é constante em $I$. (é sabido que se uma função tem derivada nula num intervalo então é constante nesse intervalo). $\blacksquare$

A partir destas proposições conclui-se que o conjunto de todas as primitivas de uma função $f$ num intervalo se pode calcular a partir do conhecimento de uma primitiva. Assim, sendo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$, o conjunto das primitivas de $f(x)$ é

$$\{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$$

Vamos designar o **conjunto das primitivas** ou **integral indefinido** de uma função $f$ por $P(f)$ ou por $\int f(x)\,dx$. Sendo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ temos, então, escrevendo de forma simplificada,

$$P(f(x)) = F(x) + c, \;\; c \in \mathbb{R}$$

ou, em notação integral,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

A expressão $\displaystyle\int f(x)\,dx$ lê-se "integral de $f(x)$ relativamente a $x$" e a partícula $dx$, embora possa assumir um significado preciso, serve simplesmente para indicar a variável relativamente à qual se está a integrar.

**Exemplos:**

1. Se $f(x) = 2x$, o conjunto das suas primitivas em $\mathbb{R}$ é

$$P(2x) = x^2 + c, \;\; c \in \mathbb{R}$$

ou

$$\int 2xdx = x^2 + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

2. Se $f(x) = 3$, o seu integral indefinido $\mathbb{R}$ em é

$$P(3) = 3x + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$

ou

$$\int 3dx = 3x + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

3. Se $f(x) = x^2$, o conjunto das suas primitivas em $\mathbb{R}$ é

$$P\left(x^2\right) = \frac{x^3}{3} + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$

4. Se $f(t) = e^t$, o seu integral indefinido é

$$\int e^t dt = e^t + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Nem sempre existe primitiva de uma função $f$ num intervalo $I$. Quando existe diz-se que a função é **primitivável** ou **integrável** em $I$. O teorema seguinte dá uma condição suficiente para uma função ter primitiva, apesar de nem sempre ser possível determiná-la analiticamente.

**Teorema 1** *Se $f$ é contínua num intervalo real $I$, então $f$ é primitivável em $I$. (O intervalo $I$ pode ser todo o conjunto $\mathbb{R}$)*

Este teorema garante apenas que as funções contínuas são primitiváveis. Não diz que funções não contínuas não são primitiváveis.

Das propriedades das derivadas podem-se inferir propriedades para as primitivas:

**Proposição 3** Sejam $f$ e $g$ funcões primitiváveis num intervalo $I$ e $k$ uma constante arbitrária. Então:

1. $kf$ é primitivável e sendo $F$ uma primitiva de $f$, $kF$ é primitiva de $kf$, ou seja,

$$P(kf(x)) = kP(f(x)).$$

Em notação integral, tem-se

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

2. $f+g$ é primitivável e sendo $F$ uma primitiva de $f$ e $G$ uma primitiva de g, $F+G$ é primitiva de $f+g$, ou seja,

$$P\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=P\left(f\left(x\right)\right)+P\left(g\left(x\right)\right).$$

Em notação integral, tem-se

$$\int f\left(x\right)+g\left(x\right)dx=\int f\left(x\right)dx+\int g\left(x\right)dx.$$

**Demonstração:**

1. Para ver que $kF$ é primitiva de $kf$, basta derivar:

$$\left(kF\right)'=kF'=kf.$$

2. Para ver que $F+G$ é primitiva de $f+g$, basta derivar:

$$\left(F+G\right)'=F'+G'=f+g. \blacksquare$$

O primeiro resultado permite que constantes "atravessem" o sinal de integral, o que facilita o cálculo de muitas primitivas, como veremos na secção seguinte. O segundo resultado é facilmente generalizado à soma de qualquer número de funções e permite decompor a primitiva de uma função que inclua somas na soma de várias primitivas o que, novamente, facilita muitos cálculos.

**Exemplos:**

1. $P\left(5x^2\right) \underset{\text{1. da Prop.3}}{\underset{\downarrow}{=}} 5P\left(x^2\right)=\dfrac{5x^3}{3}+c,\ c\in\mathbb{R}.$

2. $P\left(\cos x+\sin x\right) \underset{\text{2. da Prop.3}}{\underset{\downarrow}{=}} P\left(\cos x\right)+P\left(\sin x\right)=\sin x-\cos x+c,\ c\in\mathbb{R}.$

3. $P\left(x^5+2x^4-3x^3+4x^2-5x+6\right)=$

$$\underset{\text{2. da Prop.3}}{\underset{\downarrow}{=}} P\left(x^5\right)+P\left(2x^4\right)-P\left(3x^3\right)+P\left(4x\right)^2-P\left(5x\right)+P\left(6\right)=$$

$$\underset{\text{1. da Prop.3}}{\underset{\downarrow}{=}} P\left(x^5\right)+2P\left(x^4\right)-3P\left(x^3\right)+4P\left(x^2\right)-5P\left(x\right)+P\left(6\right)=$$

$$\underset{\text{Ex. 8 da pg.57}}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{1}{6}x^6+\frac{2}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

**Proposição 4** Se $f$ é uma função primitivável num intervalo $I$, $a\in I$ e $b\in\mathbb{R}$, existe uma única primitiva $F$ de $f$ verificando a condição $F\left(a\right)=b$.

**Demonstração:** Se $G(x)$ é uma primitiva de $f$, então a função

$$F(x) = G(x) - G(a) + b$$

é também primitiva de $f$ (proposição 1) e

$$F(a) = G(a) - G(a) + b = b,$$

o que prova a existência de $F$ nas condições do enunciado. Se houver duas funções satisfazendo essas condições, a sua diferença é uma constante (proposição 2) e, como no ponto $a$ essa diferença é 0, as duas funções têm de ser a mesma. ■

Esta proposição permite resolver os chamados "problemas de valor inicial" ou "problemas de Cauchy", dos quais, de seguida, damos um exemplo.

**Exemplo:**

Determinar a primitiva $F(x)$ da função $f(x) = 2x$ que verifica a condição $F(2) = 5$.

(Enunciados alternativos: **ou** que para $x = 2$ tem o valor 5 **ou** cujo gráfico passa no ponto de coordenadas $(2, 5)$).

Neste exemplo $a = 2$ e $b = 5$.

Considerando a primitiva $G(x) = x^2$ da função $f(x) = 2x$ (ex. 1 da pg. 57), pela demonstração anterior, a função

$$\begin{aligned} F(x) &= G(x) - G(2) + 5 \\ &= x^2 - 2^2 + 5 = \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

é a primitiva procurada.

Alternativamente o problema pode-se resolver determinando o conjunto das primitivas de $f$ e depois calculando a constante $c$ de modo a obter $F$ nas condições requeridas:

Como

$$P(2x) = x^2 + c,\ c \in \mathbb{R},$$

a função $F(x)$ procurada é da forma

$$F(x) = x^2 + c.$$

Mas, para $F(2) = 5$, tem de ser

$$\begin{aligned} F(2) &= 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2^2 + c = 5 \\ &\Rightarrow c = 1, \end{aligned}$$

pelo que

$$F(x) = x^2 + 1.$$

## Primitivas imediatas

Designam-se por primitivas imediatas aquelas que podem ser calculadas a partir de derivadas já conhecidas e por "inversão" das regras de derivação. A partir da tabela de derivadas podemos inferir uma tabela análoga para primitivas.

| | **Primitivas** | |
|---|---|---|
| | **Se $x$ é uma variável:** | **Se $f$ é uma função de $x$:** |
| 1. | $P(x^\alpha) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$ (para $\alpha \neq -1$) | $P(f^\alpha . f') = \dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$ (para $\alpha \neq -1$) |
| 2. | $P(e^x) = e^x + c.$ | $P\left(e^f . f'\right) = e^f + c.$ |
| 3. | $P(a^x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + c.$ (para $a \in \mathbb{R}^+$) | $P\left(a^f . f'\right) = \dfrac{a^x}{\ln a} + c.$ (para $a \in \mathbb{R}^+$) |
| 4. | $P(x^{-1}) = P\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln\|x\| + c.$ | $P\left(\dfrac{f'}{f}\right) = \ln\|f\| + c.$ |
| 5. | $P(\cos x) = \sin x + c.$ | $P(\cos f.\ f') = \sin f + c.$ |
| 6. | $P(\sin x) = -\cos x + c.$ | $P(\sin f.\ f)' = -\cos f + c.$ |
| 7. | $P\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = \tan x + c.$ | $P\left(\dfrac{f'}{\cos^2 f}\right) = \tan f + c.$ |
| 8. | $P\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = \cot x + c.$ | $P\left(-\dfrac{f'}{\sin^2 f}\right) = \cot f + c.$ |
| 9. | $P\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x + c.$ | $P\left(\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\right) = \arcsin f + c$ |
| 10 | $P\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arccos x + c.$ | $P\left(-\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\right) = \arccos f + c.$ |
| 11. | $P\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = \arctan x + c.$ | $P\left(\dfrac{f'}{1+f^2}\right) = \arctan f + c.$ |
| 12 | $P\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right) = \operatorname{arccot} x + c.$ | $P\left(-\dfrac{f'}{1+f^2}\right) = \operatorname{arccot} f + c.$ |

Há outras primitivas que podem ser calculadas a partir destas, mediante pequenas manipulações envolvendo, por exemplo:

- os resultados da proposição 3, que permitem tirar constantes "fora" do integral e decompor uma primitiva numa soma de duas ou mais primitivas;
- produtos e divisões por constantes de modo a encontrar valores em "falta", mas sem alterar a função;
- operações com as funções, como dividir o numerador de uma função racional pelo seu denominador, quando o grau do numerador é maior ou igual ao grau do denominador.
- utilização de identidades trigonométricas.

**Exemplos:**

1. Funções cuja primitiva é um logaritmo - linha 4 da tabela de primitivas. Este caso surge quando se primitiva um cociente que no denominador tenha uma determinada função e no numerador a sua derivada. Por vezes é necessário "ajustar" as constantes:

   (a) $P\left(\frac{x}{x^2}\right) = P\left(\frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}P\left(\frac{2x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}P\left(\frac{(x^2)'}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\ln x^2 + c$

   (b) $P\left(\frac{2\sin x}{1+\cos x}\right) = -2P\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}\right) = -2P\left(\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}\right) = -2\ln|1+\cos x|$

2. Funções cuja primitiva é a potência de uma função - linha 1 da tabela de primitivas. Este caso surge quando se primitiva um produto de uma potência de uma função pela derivada desssa função. Por vezes é necessário ajustar as constantes para se verificar essa situação:

   (a) $P\left(3(3x-5)^4\right) = P\left((3x-5)'(3x-5)^4\right) = \frac{(3x-5)^5}{5} + c$

   (b) $P\left((3x-5)^4\right) =$
   $= \frac{1}{3}P\left(3(3x-5)^4\right) =$
   $= \frac{1}{3}P\left((3x-5)'(3x-5)^4\right)$
   $= \frac{1}{3}\left(\frac{(3x-5)^5}{5}\right) + c =$
   $= \frac{(3x-5)^5}{15} + c$

   (c) $P\left(\frac{\ln x}{x}\right) = P\left(\ln x\,(\ln x)'\right) = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$

   (d) $P\left(x.e^{x^2}\right) = \frac{1}{2}P\left(2xe.^{x^2}\right) = \frac{1}{2}P\left((x^2)'\,e^{x^2}\right) = \frac{1}{2}e^{x^2}$

3. Casos de aplicação de outras fórmulas da tabela:

   (a) $P\left(\frac{2\sin x}{\sqrt{1-(\cos x)^2}}\right) =$
   $= -2P\left(\frac{-\sin x}{\sqrt{1-(\cos x)^2}}\right) =$
   $= -2P\left(\frac{(\cos x)'}{\sqrt{1-(\cos x)^2}}\right) =$
   $= -2\arcsin(\cos x)$

(b) $P\left(\frac{1}{1+3x^2}\right) =$

$= P\left(\frac{1}{1+\left(\sqrt{3}x\right)^2}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} P\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}x\right)^2}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} P\left(\frac{\left(\sqrt{3}x\right)'}{1+\left(\sqrt{3}x\right)^2}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\sqrt{3}x\right)$

(c) $P\left(\frac{3}{2+3x^2}\right) =$

$= 3P\left(\frac{1}{2+3x^2}\right) =$

$= 3P\left(\frac{1}{2\left(1+\frac{3}{2}x^2\right)}\right) =$

$= \frac{3}{2} P\left(\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}\right) =$

$= \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} P\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2\right)}\right) =$

$= \sqrt{\frac{3}{2}} P\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)'}{\left(1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2\right)}\right) =$

$= \sqrt{\frac{3}{2}} \arctan \sqrt{\frac{3}{2}}x + c.$

4. Casos em que se efectua uma decomposição em várias parcelas:

(a) $P\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) =$

$= P\left(\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\right) =$

$= P\left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) =$

$= P\,(1) - P\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) =$

$= x - \arctan x + c.$

(b) $P\left(\dfrac{1}{1+\cos x}\right) =$

$= P\left(\dfrac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}\right) =$

$= P\left(\dfrac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\right) =$

$= P\left(\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}\right) =$

$= P\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) + P\left(\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right) =$

$= -\cot x + \dfrac{1}{\sin x} + c$

5. Utilização de identidades trigonométricas

Sabendo que $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, torna-se fácil calcular a seguinte primitiva:

$P\,(\cos^2 x) =$

$= P\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right) =$

$= P\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 2x}{2}\right) =$

$= P\left(\dfrac{1}{2}\right) + P\left(\dfrac{\cos 2x}{2}\right) =$

$= P\left(\dfrac{1}{2}\right) + P\left(\dfrac{2\cos 2x}{4}\right) =$

$= \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + c$

## Primitivação por partes

O método de primitivação por partes permite transformar o cálculo de primitivas não imediatas no cálculo de primitivas imediatas ou de primitivas já conhecidas. Pela fórmula de derivação do produto de duas funções, sabe-se que, sendo $f$ e $g$ duas funções de $x$,

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Desta fórmula sai que

$$\begin{aligned} P\,(fg)' &= P\,(f'g + fg') \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow fg = P\,(f'g) + P\,(fg') \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P\,(fg') = fg - P\,(f'g) \end{aligned}$$

A última fórmula é, então, utilizada para o cálculo de primitivas não imediatas, habitualmente envolvendo o produto de duas funções. Para a aplicar é necessário escolher, entre as duas funções, uma para ser derivada, que tomará o lugar de "$f$" e outra para ser primitivada tomando o lugar de "$g'$".

**Exemplos:**

1. $P\left(xe^x\right)$.

   Fazendo $f = x$ e $g' = e^x$, tem-se $f' = 1$ e $g = e^x$. Assim

$$\begin{aligned} P\underbrace{(xe^x)}_{fg'} &= \underbrace{xe^x}_{fg} - P\underbrace{(1e^x)}_{f'g} = \\ &= xe^x - e^x + c \end{aligned}$$

2. Por vezes o método também se usa quando só está envolvida uma função, considerando para função $g'$ a função constante 1.

   $P\left(\ln x\right) = P\left(\ln x.1\right)$

   Fazendo $f = \ln x$ e $g' = 1$, tem-se $f' = \dfrac{1}{x}$ e $g = x$. Assim

$$\begin{aligned} P\underbrace{(\ln x.1)}_{fg'} &= \underbrace{\ln x.x}_{fg} - P\underbrace{\frac{1}{x}.x}_{f'g} = \\ &= \ln x.x - P\left(1\right) = \\ &= x\ln x - x + c \end{aligned}$$

3. Para $n \in \mathbb{N}$, $P\left(x^n \ln x\right)$.

   Neste caso, $f = \ln x$, $g' = x^n$, $f' = \dfrac{1}{x}$ e $g = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\begin{aligned} P\underbrace{(x^n \ln x)}_{fg'} &= \underbrace{\ln x.\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{fg} - P\underbrace{\left(\frac{1}{x}.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)}_{f'g} = \\ &= \ln x.\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}P\left(x^n\right) = \\ &= \ln x.\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{\left(n+1\right)^2} \end{aligned}$$

Para facilitar a aplicação do método pode ser usado um esquema no qual figurem as várias funções implicadas no processo como, por exemplo, o seguinte:

$$\begin{array}{ccc} f & \longrightarrow & f' \\ | & \times & \\ g & \longleftarrow & g' \end{array}$$

4. $P(\arctan x) = P(\arctan x.1)$

   A escolha de $f$ e $g'$ é indicada no esquema seguinte:

$$\begin{array}{ccc} f = \arctan x & \longrightarrow & f' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ | & \times & \\ g = x & \longleftarrow & g' = 1 \end{array}$$

   Então,

   $P(\arctan x) =$

   $= x\arctan x - P\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) =$

   $= x\arctan x - \dfrac{1}{2}P\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) =$

   $= x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$

5. Em certos casos é necessário, no cálculo da mesma primitiva, usar mais de uma vez o processo de primitivação por partes:

   $P(e^x(x^2-8x+5))$

   Fazemos uma primeira escolha das funções $f$ e $g'$ :

$$\begin{array}{ccc} f = x^2-8x+5 & \longrightarrow & f' = 2x-8 \\ | & \times & \\ g = e^x & \longleftarrow & g' = e^x \end{array}$$

   Fica:

   $P(e^x(x^2-8x+5)) = e^x(x^2-8x+5) - P(e^x(2x-8))$

   Para calcular $P(e^x(2x-8))$ repetimos o processo:

$$\begin{array}{ccc} f = 2x-8 & \longrightarrow & f' = 2 \\ | & \times & \\ g = e^x & \longleftarrow & g' = e^x \end{array}$$

   Então:

   $P(e^x(x^2-8x+5)) =$

   $= e^x(x^2-8x+5) - P(e^x(2x-8)) =$

   $= e^x(x^2-8x+5) - (e^x(2x-8) - P(2e^x)) =$

   $= e^x(x^2-8x+5) - e^x(2x-8) + 2e^x + c =$

   $= e^x(x^2-10x+15) + c$