CÁLCULO INTEGRAL

Primitivas

Problema:

Dada a derivada de uma função descobrir a função inicial.

Definição:

Chama-se **primitiva** de uma função f, definida num intervalo $]a,b[$, à função F tal que $F'(x)=f(x)$ e escreve-se

$$F = \mathrm{P}\, f \quad \text{ou} \quad F(x)=\int f(x)\,dx .$$

Observação:

1. A última notação deve-se a Leibniz. Conforme veremos mais tarde a primitivação está relacionada com somas (o S de soma degenerou em $\int$).

2. dx serve apenas para indicar a variável independente em relação à qual se está a primitivar.

Exemplo:

Após derivar as funções $2x+10$; $\operatorname{sen}(x)$; $\log x$ e $5e^{-5x}$, calcule:

a) $P(2)$ **b)** $P(\cos(x))$ **c)** $\mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ **d)** $P(-25\, e^{-5x})$

A primitiva de uma função, ao contrário da derivada, não está univocamente determinada.

Teorema:

Se F é primitiva de f, então $F+c$, com c constante real qualquer, também é uma primitiva de f .

Teorema:

Se F_1 e F_2 são duas primitivas da função f em $]a,b[$, então existe uma constante c tal que $F_2 = F_1 + c$.

Definição:

Ao conjunto de todas as primitivas de uma função f chama-se integral indefinido ou simplesmente integral da função f e representa-se $\int f(x)\,dx$.

Observação:

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$. A c chama-se constante de integração.

Exemplo:

Um automóvel desloca-se a uma velocidade $v(t) = 3t^2 + 42$ Km/h. Quantos quilómetros percorreu o automóvel ao fim de 4 horas sabendo que no instante inicial já tinha percorrido 120 Km ?

REGRAS DE PRIMITIVAÇÃO

1. $\int 1\, dx = x + c$

2. $\int (u+v)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx + c$

3. $\int (k\, u)\, dx = k \int u\, dx + c$

4. $\int (u^k\, u')\, dx = \dfrac{u^{k+1}}{k+1} + c \qquad k \neq -1$

5. $\int \dfrac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + c$

…

Nota: u e v representam funções de x e k uma constante.

Exemplo:

Calcule as seguintes primitivas:

a) $\int x^6 + 1\, dx$ **b)** $\int sen(x)\cos(x)\, dx$ **c)** $\mathrm{P}\left(5x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$

d) $\int (x+1)e^{3x^2+6x}\, dx$ **e)** $\mathrm{P}\dfrac{1}{x^2}$ **f)** $\mathrm{P}\dfrac{-4x+10}{(x^2-5x)^3}$

PRIMITIVAÇÃO POR PARTES

$$\mathbf{P}\left(h(x)g(x)\right) = \left(\mathbf{P}\, h(x)\right).g(x) - \mathbf{P}\left[\left(\mathbf{P}\, h(x)\right).g'(x)\right]$$

Observação:

Esta regra só tem interesse se a primitiva que aparece depois de aplicada a regra for mais simples do que a inicial.

Exemplo:

Calcule as seguintes primitivas:

a) $\int x\cos(x)\, dx$

b) $\int \ln(x)\, dx$

c) P (-e^{-x}arcsen(e^{-x}))

d) P $(x^2\text{sen}(x))$

PRIMITIVAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Dado $\int f(x)\,dx$, efectua-se a mudança de variável $x=\varphi(t)$, em que φ é uma função contínua, bem como a sua derivada e, além disso, admite inversa. Tem-se então que $dx=\varphi'(t)\,dt$ e

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

NOTA: A variável t é substituída depois da integração do segundo membro pela sua expressão em função de x tirada de $x=\varphi(t)$.

Existem algumas regras que podem ser usadas nalguns casos:

Função a Primitivar	Substituição a efectuar
$\sqrt{a^2-b^2x^2}$	$x=\frac{a}{b}\text{sen}\,(t)$ ou $x=\frac{a}{b}\cos\,(t)$
$\sqrt{a^2+b^2x^2}$	$x=\frac{a}{b}\text{tg}\,(t)$
$\sqrt{b^2x^2-a^2}$ …	$x=\frac{a}{b}\sec(t)$ …

Exemplos:

Calcule as seguintes primitivas:

a) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ **b)** $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\, dx$ **c)** $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}-6}\, dx$

d) $\int x^2\sqrt{x-1}\, dx$ **e)** $\int \sqrt{x^2-2x+1}\, dx$ **f)** $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

g) $\int \ln^2(x)\, dx$

PRIMITIVAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS

Recordemos que, uma função racional é da forma $\frac{\mathbf{A}(x)}{\mathbf{B}(x)}$ em que $\mathbf{A}(x)$ e $\mathbf{B}(x)$ são polinómios em x.

Observação

Há que distinguir entre função racional **própria** (em que o grau do polinómio do numerador é inferior ao grau do polinómio do denominador) e função racional **imprópria** (em que o grau do polinómio do numerador é igual ou superior ao grau do polinómio do denominador). Neste último caso, deve-se efectuar divisão dos dois polinómios. A divisão termina quando o grau do resto é inferior ao grau do divisor.

Resumindo, se temos a função racional

$$\frac{\mathbf{A_m}(x)}{\mathbf{B_n}(x)}$$

com $\mathbf{A_m}(x)$ e $\mathbf{B_n}(x)$ polinómios de grau **m** e **n** respectivamente.

Função Racional Própria: **m<n**

Função Racional Imprópria: $\mathbf{m \geq n}$

Neste caso,

$$\frac{\mathbf{A_m}(x)}{\mathbf{B_n}(x)} = \mathbf{Q_{m\text{-}n}}(x) + \frac{\mathbf{R_p}(x)}{\mathbf{B_n}(x)}$$

em que $\dfrac{\mathbf{R_p}(x)}{\mathbf{B_n}(x)}$ é uma função racional própria.

O método de primitivação que vamos usar só é aplicável a funções racionais próprias. Decompõe-se a fracção irredutível numa soma de fracções com denominador mais simples.

1º Caso: O denominador admite raízes reais todas simples.

$$\int \frac{x}{x^2 - 5x + 6}\, dx\,;$$

2º Caso: O denominador admite raízes reais múltiplas.

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x}\, dx\,;$$

3º Caso: O denominador não admite raízes reais.

$$\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)^2}\, dx$$

Exemplos:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2 - 1}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{1}{t^2 - 1}\, dt$ **c)** $\displaystyle\int \frac{t+2}{t^3 - 1}\, dt$

d) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$ **e)** $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3 - 2x^2 + 2x}\, dx$.

PRIMITIVAÇÃO DE POTÊNCIAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1º Caso: Potências ímpares de seno ou co-seno:

Decompõe-se a função num produto, fazendo intervir uma potência de expoente par, aplicando-se de seguida a Fórmula Fundamental da Trigonometria.

Exemplo: Calcular $\int \operatorname{sen}^3(x)\,dx$ e $\int \cos^5(x)\,dx$.

2º Caso: Potências pares de seno ou co-seno:

Faz-se aparecer o expoente 2 e aplicam-se as fórmulas

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}[1-\cos(2x)] \text{ ou } \cos^2(x) = \frac{1}{2}[1+\cos(2x)].$$

Exemplo: Calcule $\int \cos^4(x)\,dx$ e $\int \cos^2(x)\,dx$.

3º Caso: Potências de tangente ou co-tangente:

Decompõe-se a função num produto de potências, fazendo aparecer o expoente 2, aplicando-se de seguida as fórmulas

$$\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1 \text{ ou } \operatorname{cotan}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) - 1.$$

4º Caso: Potências de secante ou co-secante:

Decompõe-se a função num produto de potências, fazendo aparecer o expoente 2, aplicando-se de seguida as fórmulas

$$\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1 \text{ ou } \operatorname{cosec}^2(x) = \operatorname{cotan}^2(x) + 1.$$

Exemplo: Calcule $\int x \sec^4(x^2)\,dx$.