Análise Matemática I

Números Reais

↳ Algumas noções de teoria de conjuntos

Um conjunto é uma colecção de elementos.

Pode ser definido:

1. por enumeração, isto é, enumerando todos os elementos, como por exemplo em

$$S = \{1, 2, 3, 5\}$$

2. por compreensão, isto é, especificando uma propriedade comum a todos os elementos do conjunto, como por exemplo em

$$\{x : x \text{ é um número primo menor que } 6\}$$

Nota: O símbolo ':' lê-se "tal que". Por vezes também usado o símbolo "|".

O elemento 2 pertence a S, o que se representa por $2 \in S$. Designam-se todos os elementos de S, usando $\boxed{\forall x \in S}$, o que se lê como "qualquer que seja x pertencente a S". É o chamado quantificador universal.

O quantificador existencial, por seu lado, significa a existência de pelo menos um elemento em S, usando-se $\boxed{\exists x \in S}$, expressão que se lê "existe pelo menos um x pertence a S".

↳ Ao conjunto que não contém qualquer elemento chama-se conjunto vazio, e é denotado por $\emptyset$ ou $\{\}$.

- A está contido em B (representa-se por $A \subset B$) se todo o elemento de A for elemento de B
- Intersecção de conjuntos A e B (representa-se por $A \cap B$) é o conjunto $\{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$
- Reunião de conjuntos A e B (representa-se por $A \cup B$) é o conjunto $\{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- Conjunto complementar de B relativamente a A é o conjunto $\{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$ (representa-se por $A \setminus B$ ou $A - B$).

Os conjuntos são iguais se tiverem os mesmos elementos, ou seja, se tiverem contidos um no outro.

- Produto cartesiano dos conjuntos A e B ($A \times B$) é o conjunto $\{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$

$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{3, 4, 5\}$

$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5), (3,1), (4,1), (5,1), (3,2), (4,2), (5,2), (4,3), (5,3)\}$

Principais Conjuntos de N

$\mathbb{N}$: nº naturais	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$: nº inteiros	$\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, \dots\}$
$\mathbb{Q}$: nº racionais	$\mathbb{Q} : \{\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z} \setminus 0\}$
$\mathbb{R}$: nº reais	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{números irracionais}\}$

Nota: Os números irracionais são dízimas infinitas não periódicas.

→ Uma condição em IR é uma expressão com variável ou variáveis que se transforma numa proposição

Condição	$\longrightarrow$	Proposição
$x-1>0$	fazendo $x=3$	$2>0$

→ O conjunto solução de uma condição é o conjunto de elementos que a verificam

Exemplo:

Conjunto solução da condição $x-1>0$ é o conjunto $\{x \in IR : x>1\}$

Uma outra forma de representar o conjunto solução do exemplo anterior é através de um intervalo.

Intervalo de nº reais $[a,b]$, $a<b$ → é um subconjunto de IR constituído por todos os nº reais compreendidos entre a e b, incluindo estes, os extremos do intervalo: Isto é, $[a,b]=\{x\in IR: a\leq x\leq b\}$

Similarmente, os intervalos notados $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$, $[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,b[$, $]-\infty,+\infty[$ são definidos, respectivamente por:

$]a,b[=\{x\in IR: a<x<b\}$

$[a,b[=\{x\in IR: a\leq x<b\}$

$]a,b]=\{x\in IR: a<x\leq b\}$

$[a,+\infty[=\{x\in IR: x\geq a\}$

$]a,+\infty[=\{x\in IR: x>a\}$

$]-\infty,b]=\{x\in IR: x\leq b\}$

$]-\infty,b[=\{x\in IR: x<b\}$

$]-\infty,+\infty[=IR$

$IR_0^+=[0,+\infty[$

$IR^+=]0,+\infty[$

$IR_0^-=]-\infty,0]$

$IR^-=]-\infty,0[$

Exemplo:

$\{x\in IR: x>1\}=]1;+\infty[$

Duas condições são equivalentes → se têm o mesmo conjunto solução

Exemplo: As condições $2x>8$ e $x>4$ são equivalentes, isto é, $2x>8 \Leftrightarrow x>4$

Uma condição em IR pode ser impossível (se nenhum nº real a verifica) ou possível universal (se for verificada por qualquer número real) ou possível não universal (se for verificada por alguns nº reais)

Conjunção → de duas condições em IR é a condição que é verificada pelos nº reais que verificam simultaneamente as duas condições.

Disjunção → de duas condições em IR é a condição que é verificada pelos números reais que verificam pelo menos uma das condições.

O conjunto solução da disjunção de condições é a reunião dos conjunto solução das condições, respectivamente. De modo semelhante, o conjunto solução da conjunção de condições é a intersecção dos conjuntos soluções das condições, respectivamente.

Isto é,

Condições		Conjuntos
Disjunção	$\longrightarrow$	Reunião
$\vee$		$\cup$
Conjunção	$\longrightarrow$	Intersecção
$\wedge$		$\cap$

Exemplo:

- Conjunto solução de $x>2 \vee x>7$ é $]2;+\infty[\cup]7;+\infty[$, isto é, $]2;+\infty[$
- Conjunto solução de $x>2 \wedge x>7$ é $]2;+\infty[\cap]7;+\infty[$, isto é, $]7;+\infty[$

Módulo ou valor absoluto de um nº real

Módulo -> ou valor absoluto de x, $|x|$, é se $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplo: $|3| = 3$
$|-5/2| = 5/2$

↳ Propriedades sejam $x, y \in \mathbb{R}$ qualquer e $a \in \mathbb{R}^+$. Então,

- $|x| = |-x|$
- $|x|^2 = x^2$
- $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ e n par (em particular $\sqrt{x^2} = |x|$)
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, se $y \neq 0$
- $|x| = a \Leftrightarrow x = -a \vee x = a$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a \wedge x \geq -a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$
- $|x| \substack{\leq \\ = \\ \geq} |y| \Leftrightarrow x^2 \substack{\leq \\ = \\ \geq} y^2$

Exemplos:

1. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

a) $|x| = 7 \Leftrightarrow x = 7 \vee x = -7$

b) $|x+2| = 3 \Leftrightarrow x+2 = -3 \vee x+2 = 3 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 1$

c) $|x+2| \leq 1 \Leftrightarrow x+2 \leq 1 \vee x+2 \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x \leq -3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1$

2. Represente na forma de um intervalo o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |2x-5| < 1\}$. Determine, caso exista, o máximo e o mínimo do conjunto A.

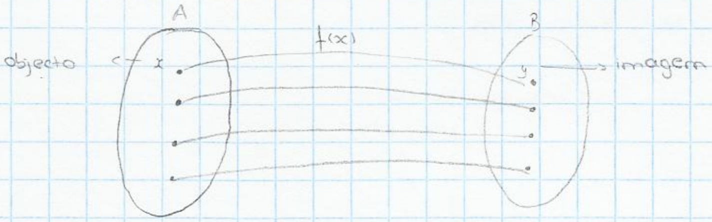
$$|2x-5| < 1 \Leftrightarrow 2x-5 < 1 \ \wedge \ 2x-5 > -1$$
$$\Leftrightarrow 2x < 6 \ \wedge \ 2x > 4$$
$$\Leftrightarrow x < 6/2 \ \wedge \ x > 4/2$$
$$\Leftrightarrow x < 3 \ \wedge \ x > 2$$
$$\Leftrightarrow 2 < x < 3$$

$]2, 3[$

→ Funções Reais da Variável Real

• Uma função é uma correspondência entre dois conjuntos A e B, que a cada elemento x do conjunto A, faz corresponder um e só um elemento $f(x)$ do conjunto B.
Escreve-se:

$f: A \to B$ ↳ x é um objecto
$x \mapsto y = f(x)$ ↳ y é a imagem



→ A variável y depende da variável x, por isso diz-se que x é a variável independente e y a variável dependente.

→ A expressão ou fórmula que traduz o modo de como a variável y depende da variável x chama-se expressão analítica da função f.

→ A função diz-se real da variável real quando $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$.

• Seja f uma função real de variável real.

↳ Chama-se domínio de f e representa-se por D_f ou simplesmente D, ao conjunto dos valores reais que têm imagem pela função f, isto é, ao conjunto dos números reais para os quais a função analítica de f está bem definida

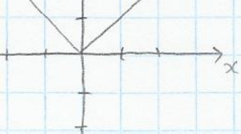
[o domínio das função vê-se no eixo do x]

↳ Chama-se contradomínio de f e representa-se por CD_f ou simplesmente CD, ao conjunto de valores reais que são imagem pela função f dos elementos do domínio.

[o contradomínio das funções vê-se no eixo do y. É a imagem da função dos elementos do domínio (x)].

Uma função $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser representada graficamente. Tal procedimento consiste em marcar num sistema de eixos cartesianos Oxy, o conjunto dos pares ordenados $(x, f(x))$, com $x \in D$.

Exemplo



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x|$

$f: x \mapsto |x|$

$D_f = \mathbb{R}$
$CD_f = \mathbb{R}_0^+$

↳ Um **zero** de uma função é todo o objecto que tem imagem nula.

Nota: Graficamente, os zeros podem ser vistos onde a representação gráfica da função intersecta o eixo das abcissas (eixo dos xx's).

[ou seja, sempre que a função passa no eixo do x]

- Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e A um subconjunto (intervalo) de D. Diz-se que:

  ↳ f é crescente no conjunto A se $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y), \forall x, y \in A$ [conforme o valor de x aumenta o valor da imagem de x também aumenta]

  ↳ f é estritamente crescente no conjunto A se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y), \forall x, y \in A$
  ↳ sempre a crescer

  ↳ f é decrescente no conjunto A, se $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y), \forall x, y \in A$ [conforme os valores de x aumentam, os valores da imagem de x diminuem]

  ↳ f é estritamente decrescente no conjunto A se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y), \forall x, y \in A$
  ↳ sempre a decrescer

- Uma função diz-se:

  ↳ monótona se é crescente ou decrescente
  ↳ mantém sempre o mesmo comportamento.

  ↳ estritamente monótona se é estritamente crescente ou estritamente decrescente.
  ↳ significa que é injectiva

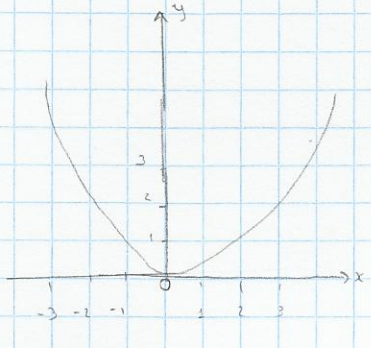
- Uma função $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se

  ↳ par se $f(-x) = f(x), \forall x \in D$

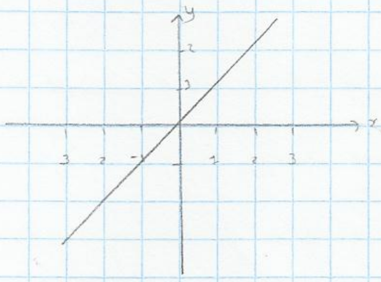
  ↳ ímpar se $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$

Nota: A representação gráfica de uma função par apresenta uma simetria relativamente ao eixo das ordenadas, e no caso de uma função ímpar apresenta uma simetria em relação à origem.

Exemplo:



Função Par
Simetria relativamente ao eixo das ordenadas



Função Ímpar
Simetria em relação à origem

- Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c \in D$. Diz-se que:

  ↳ $f(c)$ é um máximo local de f se existir $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(c), \forall x \in V_\varepsilon(c) \cap D$. A c chama-se ponto de máximo local ou maximizante local.

  ↳ $f(c)$ é um mínimo local de f se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(c), \forall x \in V_\varepsilon(c) \cap D$. A c chama-se ponto de mínimo local ou minimizante local.

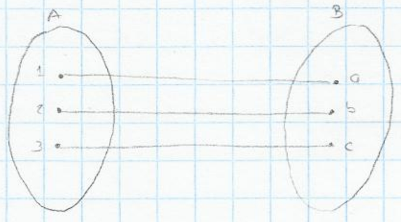
Observação:

- Se $f(x) \leq f(c), \forall x \in D \Rightarrow f(c)$ máximo absoluto
- Se $f(x) \geq f(c), \forall x \in D \Rightarrow f(c)$ mínimo absoluto

• Uma função $f: D \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ diz-se:

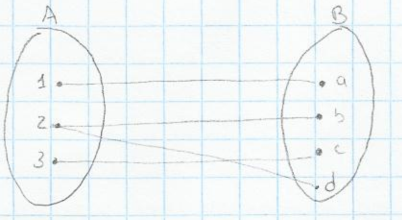
↳ injectiva se $x \neq z \Rightarrow f(x) \neq f(z), \forall x, z \in D$;

[Elementos distintos têm imagens distintas. Isto é, um elemento em A só tem uma imagem em B. $\boxed{\text{1 para 1}}$]



↳ sobrejectiva se $\forall y \in B, \exists x \in D: f(x) = y$

[todos os elementos de b são imagens. Ou seja, todos os elementos de B tem de ter pelo menos uma correspondência em A.]



↳ bijectiva se é injectiva e sobrejectiva.

Observação:

Uma função $f: D \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ diz-se invertível se for injectiva. Isto é, $g: CD_f \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ é inversa de f, escreve-se $f^{-1} = g$, se $y = g(x) \Leftrightarrow x = f(y)$. O gráfico de f é simétrico ao gráfico de f relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares.

[Uma função $f: A \to B$ diz-se invertível se existe uma função $g: B \to A$ tal que

$$g \circ f = id_A \quad \text{e} \quad f \circ g = id_B$$

A função g designa-se por função inversa de f e denota-se f^{-1}]

• Sejam $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções reais de variável real

↳ A soma de f com g é a função representada por $f+g$ em que:

- a expressão analítica é a soma das expressões analíticas de f e g: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- o domínio é a intersecção dos domínios de f e g: $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

↳ A diferença de f com g é a função representada por $f-g$ em que:

- a expressão analítica é a diferença das expressões analítica de f e g: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- o domínio é a intersecção dos domínios de f e g: $D_{f-g} = D_f \cap D_g$

↳ O **produto** de f com g é a função representada por $f \cdot g$ em que:

- a expressão analítica é o produto das expressões analíticas de f e g: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- o domínio é a intersecção dos domínios de f e g: $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

↳ A **divisão** de f com g é a função representada por f/g em que:

- a expressão analítica é o quociente entre as expressões analíticas de f e g: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$

• Sejam $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: D_g \subset \mathbb{R}$ funções reais de variável real. A **composição** de f com g é a função é a função $f \circ g$ em que:

↳ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
↳ $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

Exemplo:

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x+3$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$

Calcule $g(f(-2/3))$

$f(-2/3) = |-2/3| = |2/3| = 2/3$

$g(2/3) = 2\,(2/3) + 3 = \frac{13}{3}$

→ Funções Racionais e Irracionais

• Uma **função polinomial** é uma função cujas expressões analíticas é dada por:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

em que os coeficientes a_i são números reais e n, números naturais, é o grau:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Exemplo:

$f: x \mapsto 8$ ↳ grau 0

$g: x \mapsto 3x + 8$ ↳ grau 1

$h: x \mapsto x^2 - 2x - 8$ ↳ grau 2

Vejamos alguns casos particulares:

Função Polinomial	Expressão Analítica	Gráfico
Função constante polinomial de grau 0	$f(x) = a_0$	recta paralela ao eixo do xx
Função Afim ou linear polinomial de grau 1	$f(x) = a_1 x + a_0$ $a_1 \neq 0$	recta não vertical a_1 = declive ; a_0 = ordenada na origem
Função Quadrática polinomial de grau 2	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ $a_2 \neq 0$	parábola de eixo vertical $a_2 > 0$: concavidade voltada para cima $a_2 < 0$: concavidade " " baixo

↳ Como determinar os zeros de uma função quadrática?

R: Os zeros de uma função quadrática f, definida por $f(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$, determinam-se resolvendo a seguinte equação de 2º grau, $ax^2+bx+c=0$

Para resolver esta equação quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, aplicamos a fórmula resolvente: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

↳ Como determinar o sinal de uma função quadrática?

R: O sinal de uma função quadrática f, definida por $f(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$, determina-se resolvendo as seguintes inequações do 2º grau $ax^2+bx+c \geq 0$ e $ax^2+bx+c \leq 0$.

Para isso é necessário:

- Determinar os zeros da função quadrática
- Elaborar um quadro de sinais ou fazer um esboço da parábola.

As funções polinomiais são casos particulares das funções racionais.

• Uma função racional é uma função cuja expressão analítica é dada por: $\frac{A(x)}{B(x)}$, $B(x) \neq 0$. Onde $A(x)$ e $B(x)$ são polinómios sem fatores comuns.

$$f : \{ x \in \mathbb{R} : B(x) \neq 0 \} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{A(x)}{B(x)}$$

↳ Como determinar os zeros de uma função racional?

R: Os zeros de uma função racional f, definida por $f(x) = A(x)/B(x)$ determinam-se resolvendo a seguinte equação fracionária: $A(x)/B(x) = 0$. E,

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \wedge B(x) \neq 0$$

↳ Como determinar o sinal de uma função racional?

R: O sinal de uma função racional determina-se resolvendo as seguintes inequações fracionárias $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ e $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$.

Para isso é necessário:

- Determinar os zeros de $A(x)$ e $B(x)$
- Elaborar o quadro de sinais.

• Uma função irracional é uma função analítica é dada por uma expressão com radicais, em que o radicando figura uma expressão com variáveis.

(Na expressão $\sqrt[n]{a}$ chama-se radical, a é o radicando e n é o índice do radical.)

Nota: O domínio de uma função irracional com índice par é o conjunto de todos os números reais que tornam o radicando positivo ou nulo.

↳ Como determinar os zeros de uma função irracional?

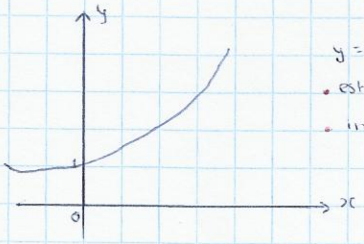
R: Os zeros de uma função irracional determinam-se seguindo os seguintes passos:

- Depois de isolar o radical, elevam-se ao quadrado, cubo, ... os membros da equação de modo a eliminar os símbolos de radical. Ter cuidado $a = b \not\Leftarrow a^2 = b^2$ mas $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$
- Logo verifica-se se as soluções obtidas são soluções da equação dada.

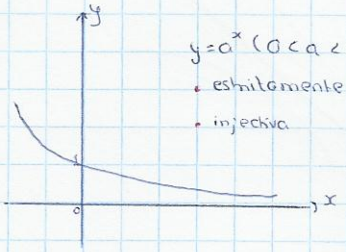
• Uma função exponencial de base a é uma função cuja expressão analítica é uma expressão onde a variável (independente) surge no expoente

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

Representação Gráfica



$y = a^x \ (a > 1)$
• estritamente crescente
• injectiva



$y = a^x \ (0 < a < 1)$
• estritamente decrescente
• injectiva

Nota: O domínio de uma função exponencial é $\mathbb{R}$ e o contradomínio $\mathbb{R}^+$.

Uma função exponencial importante é a função $f(x) = e^x$. Esta função é frequentemente usada para modelar problemas que envolvem o crescimento da população, quantidades monetárias, etc. Repare-se que esta função é exponencial com base $e > 1$ e por isso é estritamente crescente. Do mesmo modo, mas para expressar o decréscimo, nestas situações é frequente recorrer à função $g(x) = e^{-x}$.

Propriedades:

Sejam a e b nº reais positivos e x e y nº reais quaisquer

	Ex:
$a^x \times a^y = a^{x+y}$	$2^3 + 2^5 = 2^8$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\frac{3^9}{3^5} = 3^4$
$(a^x)^y = a^{x+y}$	$(5^2)^7 = 5^{2\times 7} = 5^{14}$
$(ab)^x = a^x + b^x$	$3^4 \times 2^4 = (3\times 2)^4 = 6^4$
$a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}$	$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$
$1^x = 1$	$1^{200} = 1$
$a^0 = 1$	$5465^0 = 1$
$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

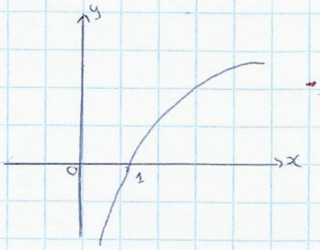
• O logaritmo de um número positivo x na base a, $a > 0$ e $a \neq 1$ é o expoente a que é necessário elevar a base a para obter esse número.

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y, \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

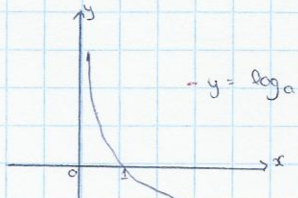
↳ Uma função logarítmica de base a é uma função que a cada x faz corresponder o seu logaritmo na base a.

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Representação Gráfica



→ $y = \log_a x \ (a > 1)$

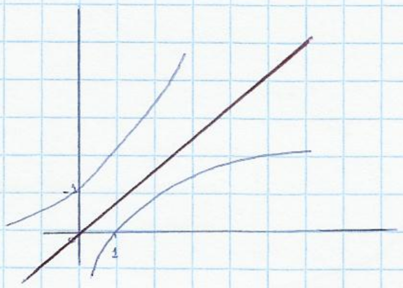


→ $y = \log_a x \ (0 < a < 1)$

Notas:

↳ O domínio de uma função logarítmica é $\mathbb{R}^+$ (não existe o logaritmo de zero e de nº negativos) e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

↳ A função logarítmica é a inversa da função exponencial. Desta forma, os gráficos destas funções são simétricos relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares:



Observação: Os logaritmos mais frequentes são os logaritmos de base 10 e de base e. Por isso optou-se por simplificar a escrita destes 2 algoritmos. Quando for feita referência a um logaritmo de base 10 (logaritmo decimal) ocultar-se-á a escrita da base na expressão do logaritmo: $x = \log_{10} y = \log y$

Quando for feita referência a um logaritmo de base e (logaritmo neperiano), optar-se-á por escrever as iniciais ln em vez de $\log_e$: $x = \log_e y = \ln y$.

Propriedades dos logaritmos

Sejam x e y nº reais positivos e $a > 0$, $a \neq 1$.

Ex:

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ — $\log_{10}(100 \times 1000) = \log_{10} 100 + \log_{10} 1000 = 2+3 = 5$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ — $\log_{10} \frac{10000}{100} = \log_{10} 10000 - \log_{10} 100 = 4-2 = 2$

$\log_a x^k = k \log_a x, \; k \in \mathbb{R}$ — $\log_{10} 100^7 = 7 \log_{10} 100 = 7 \times 2 = 14$

$\log_a a = 1$ — $\ln e = 1$

$\log_a 1 = 0$ — $\ln 1 = 0$

$a^{\log_a x} = x$ — $e^{\ln 7} = 7$

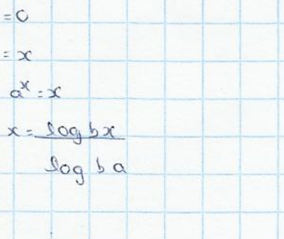
$\log_a a^x = x$ — $\ln e^{34} = 34$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ — $\log_2 x = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$

Funções Trigonométricas

A cada ângulo pode ser associado o seu seno. Esta associação é uma função de um tipo especial, é uma função trigonométrica. Há outras funções trigonométricas cujas características irão ser apresentados resumidamente. De notar ainda que as funções trigonométricas vieram alargar os conceitos existentes das razões trigonométricas (seno, coseno, tangente, cotangente, pois eram encarados como relações entre lados e ângulos de triângulos.

Considere-se um referencial para ângulos e áreas, constituído por um referencial cartesiano ortonormado e um círculo de centro na origem e raio 1, isto é, o círculo trigonométrico:



$\text{sen}\,\theta = b$

$\cos\theta = a$

$\text{tg}\,\theta = \frac{b}{a}$

$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{oposto}}{\text{hipotenusa}}$

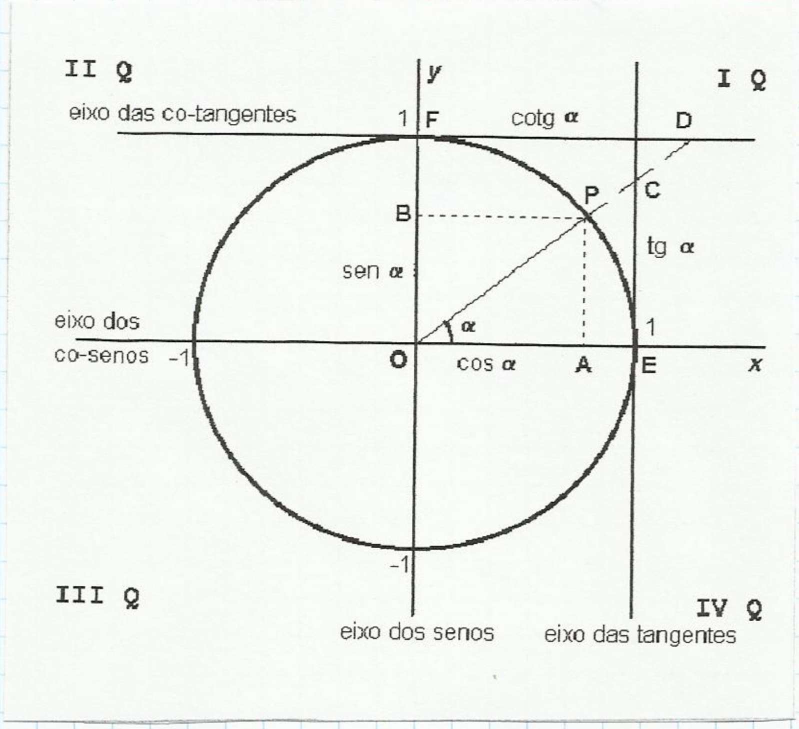
$\cos\theta = \frac{\text{adjacente}}{\text{hipotenusa}}$

$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{oposto}}{\text{adjacente}}$

Seno

O seno de um ângulo é a ordenada do ponto extremidade do arco que lhe corresponde no círculo trigonométrico e o coseno de um ângulo é a abcissa do ponto extremidade do arco que lhe corresponde, no círculo trigonométrico. É por isso que no círculo trigonométrico também se chama eixo dos senos ao eixo das ordenadas e eixo dos cosenos ao eixo das abcissas.

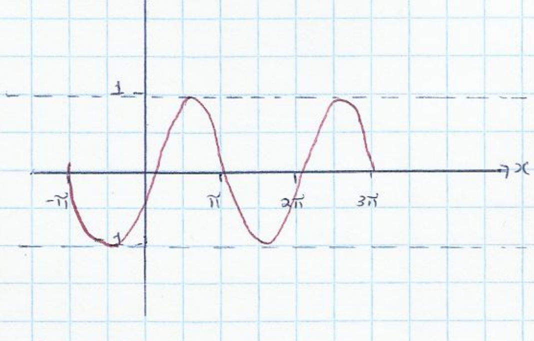
- Círculo trigonométrico:



- A função seno é uma função que a cada nº real x faz corresponder o valor do seno de um ângulo de x radianos:

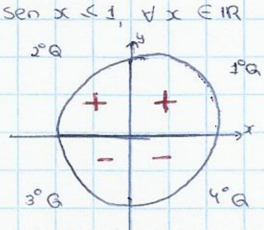
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \operatorname{sen} x$$

Representação Gráfica:



Características:

↳ Domínio: $\mathbb{R}$
↳ Contradomínio: $[-1, 1]$
↳ $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$



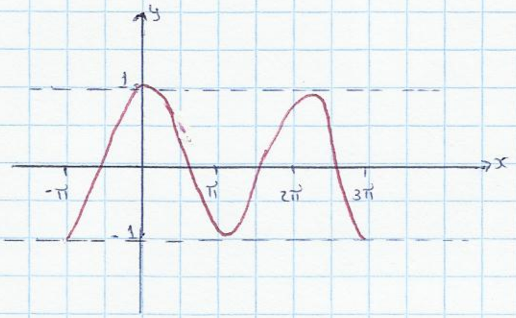
↳ É uma função ímpar, pois $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
↳ Não é uma função injectiva
↳ É uma função periódica, de período positivo mínimo 2π
↳ A expressão geral dos zeros é $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
↳ A função toma o valor máximo 1, para $x = \pi/2 + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
↳ A função toma o valor mínimo -1, para $x = -\pi/2 + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Coseno

• A função coseno é uma função que a cada nº real x faz corresponder o valor do coseno de um ângulo de x radianos:

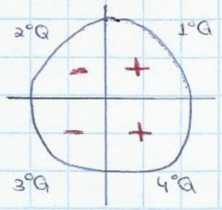
$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \cos x$$

Representação Gráfica:



Características:

↳ Domínio: $\mathbb{R}$
↳ Contradomínio: $[-1, 1]$
↳ $-1 \leq \cos x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$



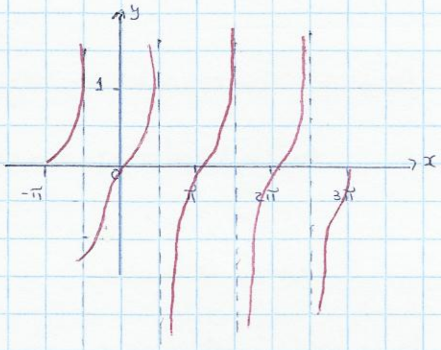
↳ É uma função par, pois $\cos(-x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$
↳ Não é uma função injectiva
↳ É uma função periódica de período positivo mínimo 2π
↳ A expressão geral dos zeros é $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
↳ A função toma o valor máximo em 1, para $x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
↳ A função toma o valor mínimo em -1, para $x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Tangente

• A função tangente é uma função que a cada nº real x faz corresponder o valor da tangente de um ângulo de x radianos:

$$h: \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \operatorname{tg} x$$

Representação Gráfica:



Características:

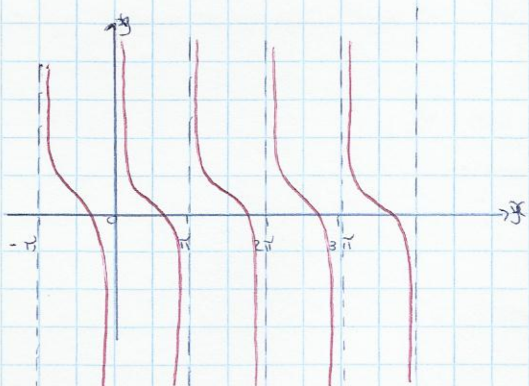
- Domínio: $\{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio: $\mathbb{R}$
- É uma função ímpar, pois $tg(-x) = -tg\, x$, $x \in D$.
- Não é uma função injectiva
- É uma função periódica, de período positivo mínimo π.
- A expressão geral dos zeros é $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Co-tangente

- A função co-tangente é uma função que a cada nº real x faz corresponder o valor da co-tangente de um ângulo em radianos:

$$i: \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto cotg\, x$$

Representação Gráfica:



Características:

- Domínio: $\{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $cotg\, x \in \mathbb{R}$, $\forall x \in D$
- É uma função ímpar, pois $cotg(-x) = -cotg\, x$, $x \in D$.
- Não é uma função injectiva
- É uma função periódica, de período positivo mínimo π
- A expressão geral dos zeros é $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

O quadro que se segue mostra alguns valores das funções trigonométricas em argumentos do 1º quadrante.

	0 0	$\pi/6$ $30°$	$\pi/4$ $45°$	$\pi/3$ $60°$
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
co-tangente	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Fórmula Fundamental da Trigonometria

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Outras fórmulas

$$tg\, x = \frac{sen x}{\cos x} \qquad cotg\, x = \frac{\cos x}{sen x} \qquad sec\, x = \frac{1}{\cos x}$$

$$cosec\, x = \frac{1}{sen x} \qquad 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1 + cotg^2 x = \frac{1}{sen^2 x}$$

$$sen(2x) = 2 sen x \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - sen^2 x$$

$$sen^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Funções Trigonométricas Inversas

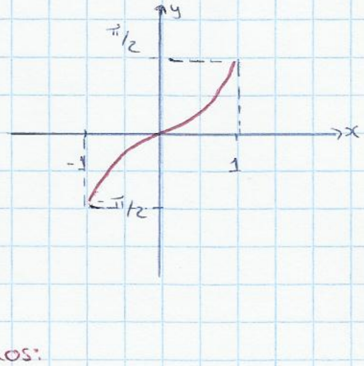
Como se pode observar pelos seus gráficos, as funções seno, coseno, tangente e co-tangente não são invertíveis, nos respectivos domínios. Consequentemente, as correspondências inversas das funções referidas não são funções.
Existem infinitas restrições de cada uma dessas funções que são invertíveis. No entanto para cada função trigonométrica há uma restrição chamada restrição principal.

Arco Seno

• A função arco seno é uma função que a cada nº real x faz corresponder o ângulo (ou arco) cujo seno é x, e representa-se por arcsen x:

$$f^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$
$$x \longmapsto arcsen\, x$$

Representação Gráfica:



Exemplos:

1) $arcsen \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/3$

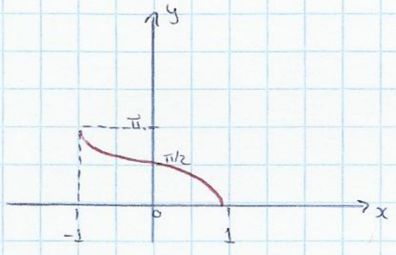
2) $sen(arcsen\, 1/2) = sen\, \pi/6 = 1/2$

Arco Coseno

• A ~~função~~ função arco coseno é uma função que a cada nº real x faz corresponder o ângulo (ou arco) cujo coseno é x, e representa-se por $\arccos x$.

$$g^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$
$$x \mapsto \arccos x$$

Representação Gráfica:



Exemplo:

1) $\cos(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

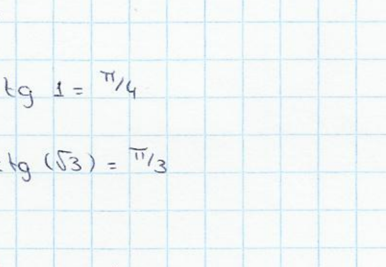
2) $\arccos 1 = 0$

Arco Tangente

• A função arco tangente é uma função que a cada nº real x faz corresponder o ângulo (ou arco) cuja tangente é x, e representa-se por $\operatorname{arctg} x$.

$$h^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$
$$x \mapsto \operatorname{arctg} x$$

Representação Gráfica:



Exemplo:

1) $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$

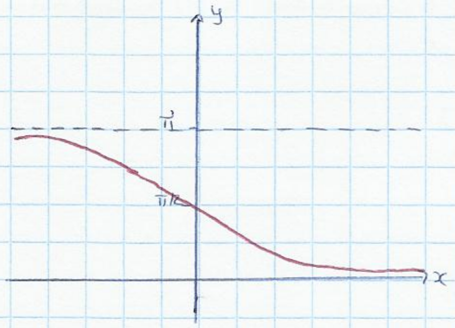
2) $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \pi/3$

Arco Cotangente

• A função arco cotangente é uma função que a cada nº real x faz corresponder o ângulo (ou arco) cuja cotangente é x, e representa-se por $\operatorname{arccotg} x$

$$i^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[$$
$$x \mapsto \operatorname{arccotg} x$$

Representação Gráfica:



Exemplo:

1) $2 \operatorname{arccotg} 0 = 2 \cdot \pi/2 = \pi$

→ Noções Topológicas em IR

- Sejam $b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Chama-se vizinhança de raio ε de b, e designa-se por $V_\varepsilon(b)$, ao conjunto $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$.

- Sejam $b \in \mathbb{R}$ e S um conjunto de nº reais:

↳ Diz-se que b é interior a C se existir uma vizinhança de b contida em C

[Exemplo: C $]-1,3]$ $\quad int(C) =]-1,3[$

Interior de C é o conjunto dos pontos interiores de C. Para determinar o interior, normalmente basta escrever o intervalo com os parentesis abertos.]

↳ Diz-se que b é fronteira a C se toda a vizinhança de b contiver pelo menos um ponto de C e contiver pelo menos um ponto de $\mathbb{R} \setminus C$.

[Exemplo anterior: $fr(C) = \{-1,3\}$

fronteira (pontos dentro e fora do intervalo.

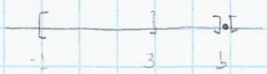
b é ponto fronteira de C se para todo $\varepsilon > 0$ $\quad \begin{cases} V_\varepsilon(b) \cap C \neq \emptyset \\ V_\varepsilon(b) \cap (\mathbb{R} \setminus C) \neq \emptyset \end{cases}$

Os pontos fronteira são normalmente todos os pontos do intervalo]

↳ Diz-se que b é exterior a C se existir uma vizinhança de b contida em $\mathbb{R} \setminus C$

[Exemplo anterior: $ext(C) =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$

b é ponto exterior de C se b é um ponto interior de $\mathbb{R} \setminus C$ (o complementar)



O exterior são os pontos que não são interiores]

Nota: O ponto é exterior a S se, e só se, é interior a $\mathbb{R} \setminus C$.

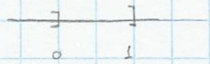
- O conjunto dos pontos interiores de C chama-se interior de C e representa-se por $int(C)$. O conjunto dos pontos exteriores a C chama-se exterior de C e representa-se por $ext(C)$. O conjunto dos pontos fronteiros a C chama-se fronteira de C e representa-se por $fr(C)$.

Nota: Qualquer que seja $C \in \mathbb{R}$ tem-se:

- $int(C) \cap ext(C) = \emptyset$
- $int(C) \cap fr(C) = \emptyset$
- $fr(C) \cap ext(C) = \emptyset$
- $int(C) \cup fr(C) \cup ext(C) = \mathbb{R}$

Exemplos:

1) Seja $S =]0, 1]$



$int(S) =]0,1[$
$ext(S) =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$
$fr(S) = \{0,1\}$

2) Seja $S = \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$

$int(S) = \emptyset$
$ext(S) = \mathbb{R} \setminus \{S \cup \{0\}\}$
$fr(S) = S \cup \{0\}$

- Seja $C \in \mathbb{R}$. Diz-se que C é aberto se $C = int(C)$

juntar o que falta para ter os pontos fronteiros

- Seja $C \subset \mathbb{R}$. Chama-se fecho ou aderência de C ao conjunto $\overline{C} = C \cup fr(C)$. Os pontos de $\overline{C}$ dizem-se pontos aderentes de C. C diz-se fechado se $C = \overline{C}$.

[Exemplo aderência: $\overline{S} = S \cup fr = [1,3]$. S não é fechado pq $\overline{S} \neq S$]

Nota:

- $\overline{C} = int(C) \cup fr(C)$
- C é fechado se, e só se, $fr(C) \subset C$.

- Sejam $b \in \mathbb{R}$ e C um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que b é ponto de acumulação de C se toda a vizinhança de b contiver pelo menos um ponto de C distinto de b. Ao conjunto dos pontos de acumulação de C chama-se derivado de C. Diz-se que b é ponto isolado de C se existir uma vizinhança de b que não contém pontos de $C \setminus \{b\}$.

[Exemplo: $S = \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$. 0 é o ponto de acumulação.

b é ponto de acumulação de C se $\forall \varepsilon > 0,]b-\varepsilon; b+\varepsilon[\setminus \{b\} \cap A \neq \emptyset$.]

Notas:

- Todo o ponto interior de C pertence a C.
- Nenhum ponto exterior a C pertence a C (pois pertence ao complementar de C, $\mathbb{R} \setminus C$).
- Um ponto fronteiro a C pode ou não pertencer a C e o mesmo sucede com um ponto aderente a C e um ponto de acumulação de C.
- Todo o ponto de C é aderente a C.
- Se $b \in int(C)$, então b é ponto de acumulação de C.
- Um ponto isolado de C pertence a C.

• Sejam $b \in \mathbb{R}$ e C um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que b é majorante de C se $b \geq x, \forall x \in C$. Diz-se que b é minorante de C se $b \leq x, \forall x \in C$.

↳ Representa-se o conjunto dos majorantes de C por $M(C)$ e o conjunto dos minorantes de C por $m(C)$.

• Seja C um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que C é majorado se admitir majorantes. Diz-se que S é minorado se admitir minorantes. Se C for majorado e minorado diz-se que é limitado.

Exemplo:

Seja $S = \{5, 7, 9\}$

$M(S) = [9, +\infty[$ é limitado.

$m(S) =]-\infty, 5]$

• Seja C um subconjunto majorado de $\mathbb{R}$. Diz-se que β é o supremo de C se β for majorante de C e for o menor de todos os outros majorantes de C (isto é, se β for o menor dos majorantes de C); representa-se por $\beta = \sup(C)$. Se β, o supremo de C, pertencer a C, diz-se que β é o máximo de C, neste caso; representa-se por $\beta = \max(C)$.

• Seja C um subconjunto minorado de $\mathbb{R}$. Diz-se que α é o ínfimo de C, se α for minorante de C e for o maior que todos os outros minorantes de C (isto é, se α for maior dos minorantes de C) representa-se por $\alpha = \inf(C)$. Se α, o ínfimo de C, pertence a C, diz-se que α é o mínimo de C; neste caso, representa-se por $\alpha = \min(C)$.

Exemplo:

Seja $S = \{5, 7, 9\}$

$\inf(S) = \min(S) = 5$

$\sup(S) = \max(S) = 9$

↳ Em $\mathbb{R}$, todo o subconjunto majorado tem supremo e todo o conjunto minorado tem ínfimo.

a é majorante se : $x \leq a, \forall x \in C$

b é minorante de : $b \leq x, \forall x \in C$

O menor dos majorantes é chamado supremo

O maior dos minorantes é chamado ínfimo

C diz-se majorado se tem majorantes
" " " minorado se tem minorantes
} se for minorado e majorado é limitado

Se o $\sup(C) \in C$ é chamado máximo

Se o $\inf(C) \in C$ é chamado mínimo

Exemplo:

$C = \{x : x^2 - 1 < 0\}$

$x^2 - 1 < 0$

$\Leftrightarrow x^2 < 1$

$\Leftrightarrow x < \sqrt{1}$

$]-1, 1[$

maj $= 1$

min $= -1$

sup $= 1$

inf $= -1$

não tem máximo, nem mínimo por o sup e o inf não pertencem ao intervalo]

→ Sucessões de Números Reais

• Chama-se sucessão de números reais a toda a aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Uma sucessão pode ser representada como:

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n)$$

em que $u(n)$ (ou simplesmente u_n), a expressão designatória que define a sucessão, chama-se termo geral da sucessão e o conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ $u_n: n \in \mathbb{N}\}$ diz-se conjunto dos termos da sucessão.

Exemplo:

Seja a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$. Então:

$u_1 = 1$, 1 é o primeiro termo de (u_n)

$u_2 = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ é o segundo termo de (u_n)

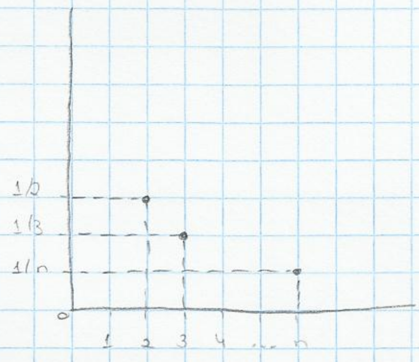
...

(e assim sucessivamente)

isto é, o conjunto dos termos (u_n) é

$$\{u_n: n \in \mathbb{N}\} = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$$

Atendendo a que uma sucessão tem domínio $\mathbb{N}$, a representação gráfica é um conjunto de pontos isolados. Representação gráfica:



• As sucessões podem ser definidas por uma expressão algébrica, o seu termo geral, e podem ser definidas por recorrência. Consiste em dar a conhecer alguns dos primeiros termos sendo o termo de ordem n definido através dos anteriores.

Exemplo:

Seja v_n definido por recorrência:

$$\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_n = 2 + v_{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Então $v_2 = 2 + 3 = 5$

$v_3 = 2 + 5 = 7$ ...

• Uma sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão R se existe um número real r tal que:

$$u_{n+1} - u_n = r \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

↳ O termo geral de uma progressão aritmética é $u_n = u_1 + (n-1)r$

↳ A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, S_n, é dada por

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n.$$

Exemplo:

A sucessão a_n cujo termo geral é $a_n = -\frac{n}{2} + 1$, é uma progressão aritmética de razão $-\frac{1}{2}$.

$$a_n = -\frac{n}{2} + 1$$
$$a_{n+1} = \frac{-n+1}{2} + 1$$

Então,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2} + 1 - \left(\frac{-n}{2} + 1\right) = \frac{-1}{2} \; , \; \forall n \in \mathbb{N}$$

• Uma sucessão (u_n) de termos não nulos é uma progressão geométrica de razão R se existe um número real r tal que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = R, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

↳ O termo geral de uma progressão geométrica é $u_n = u_1 \cdot R^{n-1}$

↳ A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, S_n, é dada por

$$S_n = u_1 \cdot \frac{1 - R^n}{1 - R}$$

Exemplo:

A sucessão (b_n) cujo termo geral é $b_n = -2^{n-1}$ é uma progressão geométrica de razão R.

$$b_n = -2^{n-1}$$
$$b_{n+1} = -2^{n+1-1} = -2^n$$

Então,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{-2^n}{-2^{n+1}} = 2^{n-(n-1)} = 2 \; , \; \forall n \in \mathbb{N}$$

• Uma sucessão diz-se limitada superiormente se o conjunto dos seus termos for majorado; diz-se limitada inferiormente se o conjunto dos seus termos for minorado, diz-se limitada se o conjunto dos seus termos for limitado.

Exemplo:

Seja (u_n) definida por $u_n = 4 + (-1)^n$

É limitada porque $U = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \{3, 5\}$ é limitado $\begin{cases} m(U) =]-\infty, 3] \\ M(U) = [5, +\infty[\end{cases}$

• Dadas duas sucessões de números reais (u_n) e (v_n), chama-se soma, diferença e produto de (u_n) e (v_n) às sucessões (u_n+v_n), (u_n-v_n) e $(u_n \times v_n)$ de termos gerais, respectivamente, u_n+v_n, u_n-v_n e $u_n \times v_n$. Se $v_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, chama-se quociente de u_n e v_n à sucessão $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ de termo geral $\frac{u_n}{v_n}$.

• Uma sucessão (u_n) diz-se monótona crescente (respectivamente, monótona decrescente) se $u_{n+1} \geq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (respectivamente, $u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

↳ A sucessão (u_n) diz-se monótona se for monótona crescente ou monótona decrescente.

Exemplo: A sucessão $u_n = 4n+2$

É monótona crescente

$$u_{n+1} - u_n = 4(n+1)+2 - 4n+2 = \cancel{4n} + 4 + \cancel{2} - \cancel{4n} \cancel{+2} = 4 > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então $u_{n+1} > u_n$

• Diz-se que a sucessão u_n é um infinitamente grande positivo (ou que tende para $+\infty$) e representa-se por $u_n \to +\infty$, se qualquer que seja o número real A, for possível determinar uma ordem p a partir da qual todos os termos da sucessão são maiores que A. Diz-se que a sucessão u_n é um infinitamente grande negativo (ou que tende para $-\infty$) e representa-se $u_n \to +\infty$, se a sucessão $(-u_n)$ for um infinitamente grande positivo. Diz-se que a sucessão u_n é um infinitamente grande em módulo se $|u_n| \to +\infty$.

Exemplo:

1) $u_n = n^2 \to +\infty$
2) $u_n = -n \to -\infty$
3) Seja $u_n = (-n)^n$. Então $|u_n| = n^n \to +\infty$

Notas:

↳ Se (u_n) é tal que $u_n \to +\infty$, $u_n \to -\infty$ ou $|u_n| \to +\infty$, então (u_n) não limitada. A recíproca não é verdadeira. Por exemplo a sucessão:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{, se } n \text{ é par} \\ n & \text{, se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é não limitada e $u_n \to +\infty$, $u_n \to -\infty$, $|u_n| \to +\infty$

↳ O facto de $u_n \to +\infty$ não significa que u_n seja crescente. (nem que exista uma ordem a partir da qual seja crescente). Exemplo: $u_n = (-1)^n + 2n$.

• Diz-se que uma sucessão (u_n) é convergente para um número $a \in \mathbb{R}$, ou que o limite da sucessão (u_n) é $a \in \mathbb{R}$ e escreve-se $\lim u_n = a$ ou $u_n \to a$, se qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$u_n \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\text{ para } \forall n > p.$$

↳ Isto é, por mais pequeno que seja $\varepsilon > 0$ (e portanto a amplitude do intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$) todos os termos da sucessão "caem" dentro desse intervalo a partir de certa ordem.

Uma sucessão (u_n) que não é convergente diz-se divergente.

Exemplo:
A sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{1}{n}$

$\lim \frac{1}{n} = 0$, convergente
infinitésimo

- Diz-se que a sucessão u_n é um infinitésimo se $u_n \to 0$.

Teoremas:

↳ O limite de uma sucessão convergente u_n é único.
↳ O limite de uma sucessão constante é a própria constante.
↳ Toda a sucessão convergente é limitada. A recíproca não é verdadeira.

Exemplo: $u_n = \begin{cases} 3, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 5, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

↳ Toda a sucessão monótona e limitada é convergente. A recíproca não é verdadeira.

Exemplo: $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ converge para zero e não é monótona.

↳ Sejam (u_n), (v_n) e (w_n) sucessões tais que $u_n \to a$, $v_n \to a$ e a partir de certa ordem, $u_n \leq w_n \leq v_n$. Então $w_n \to a$.

→ Propriedades:

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões convergentes i.e., $\lim u_n = u$, $u \in \mathbb{R}$ e $\lim v_n = v$, $v \in \mathbb{R}$. Então:

- $\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = u + v$
- $\lim (u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = u - v$
- $\lim (k u_n) = k \lim u_n = k u$, $k \in \mathbb{R}$
- $\lim (u_n \cdot v_n) = \lim u_n \times \lim v_n = u \times v$
- $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} = \frac{u}{v}$, se $\lim v_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim (u_n)^{v_n} = (\lim u_n)^{\lim v_n} = u^v$ (u e v não podem ser simultaneamente nulos.)
- $\lim \sqrt[k]{u_n} = \sqrt[k]{\lim u_n} = \sqrt[k]{u}$ (se k é par, $k \geq 0$.

Teorema:

↳ O produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo.

Propriedades:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty) + a = +\infty$
- $(-\infty) - a = -\infty$, $a \in \mathbb{R}$
- $(+\infty) \times (-\infty) = \infty$

- $a \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$
- $a \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases}$
- $\frac{a}{0^+} = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$

- $a > 1 \Rightarrow a^{+\infty} = +\infty$
  $a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}} = 0$
- $0 < a < 1 \Rightarrow a^{+\infty} = 0$
  $a^{-\infty} = +\infty$
- $0^b = \begin{cases} 0, & b > 0 \\ +\infty, & \text{se } b < 0 \end{cases}$

- $(+\infty)^b = \begin{cases} +\infty, & b > 0 \\ 0, & b < 0 \end{cases}$

Formas Indeterminadas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0

Teoremas:

↳ $\lim a^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \\ \text{não existe} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$

↳ Se $k \in \mathbb{R}$ e $u_n \to +\infty$, então $\lim \left(1 + \frac{k}{u_n}\right)^{u_n} = e^k$

Sucessão de Cauchy

Uma sucessão $(u_n) = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{R}$ é dita ser uma sucessão de Cauchy se para todo o $\varepsilon > 0$, existir um número natural $N(\varepsilon)$ (eventualmente dependente de ε) tal que $|u_n - u_m| < \varepsilon$ para todo o n e m tais que $n \geq N(\varepsilon)$ e $m \geq N(\varepsilon)$.

↳ Qualquer sucessão de Cauchy é limitada.
↳ Toda a sucessão limitada tem subsucessões convergentes
↳ Uma sucessão é convergente sse é uma sucessão de Cauchy
↳ Toda a sucessão convergente é limitada

Toda a sucessão convergente é limitada, toda a sucessão convergente é de Cauchy

Limites

Seja a um ponto de acumulação do domínio D da função $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diz-se que $b \in \mathbb{R}$ é limite de f no ponto a (ou quando x tende para a) e escreve-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se, $\forall \delta > 0 \ \exists \ \varepsilon > 0$: $x \in D \wedge |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$.

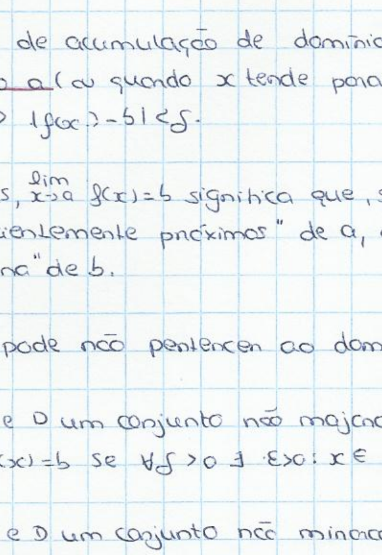
Por outras palavras, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ significa que, se considerarem valores de x pertencentes ao domínio de f e "suficientemente próximos" de a, os valores correspondentes f(x) estarão "tão próximos quanto se queira" de b.

Nota: O ponto a pode não pertencer ao domínio mas não pode ser um ponto isolado.

• Seja $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e D um conjunto não majorado. Diz-se que o limite de f quando $x \to +\infty$ é b, e escreve-se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ se $\forall \delta > 0 \ \exists \ \varepsilon > 0$: $x \in D$, $x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$.

• Seja $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e D um conjunto não minorado. Diz-se que o limite de f quando $x \to -\infty$ é b e escreve-se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ se $\forall \delta > 0 \ \exists \ \varepsilon > 0$: $x \in D$, $x < -\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$.

Considere-se, agora, a função $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \to \frac{|x|}{x}$. Determine-se, se existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.



∴ Conclui-se que existem duas formas de aproximação para o ponto 0, por valores à direita de 0 ($x \Rightarrow 0^+$) ou por valores à esquerda de 0 ($x \Rightarrow 0^-$). Consequentemente, tem-se $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -1$, logo, não existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

Observação: Repare-se que $g(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D, chama-se limites laterais de f em a e $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

↳ O primeiro diz-se limite à direita de f no ponto a

↳ O segundo diz-se limite à esquerda de f no ponto a

→ Uma função f tem limite quando $x \to a$ se e só se existirem e forem iguais os limites laterais de f à direita e à esquerda de a. O limite da função é o valor comum aos dois limites laterais.

Mas pode existir só um dos limites laterais (ou dois com valores distintos) sem que exista $\lim_{x \to a} f(x)$.

Em relação ao conceito de limite de uma função num ponto, enunciam-se as seguintes propriedades:

→ Unicidade do limite de uma função → o limite de f, quando existe é único.
→ Limite de uma função constante → o limite de uma função constante é a própria constante.

Exemplo:
Seja $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ \operatorname{arctg} x & \text{se } x > 1 \end{cases}$. Calcule $\lim_{x \to 1} f(x)$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$ logo não existe limite.

Propriedades (operações com limites)

Sendo $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \ell_2$, em que ℓ_1 e ℓ_2 são dois nº reais e a é finito ou infinito

- $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = \ell_1 + \ell_2$
- $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = \ell_1 - \ell_2$
- $\lim_{x \to a} (K f(x)) = K \lim_{x \to a} f(x) = K \cdot \ell_1$, $K \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$, se $\ell_2 \neq 0$
- $\lim_{x \to a} (f(x)^p) = (\lim_{x \to a} f(x))^p = \ell_1^p$ $(p \in \mathbb{N})$
- $\lim_{x \to a} \sqrt[K]{f(x)} = \sqrt[K]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[K]{\ell_1}$ (com $K \in \mathbb{N}$ e $f(x) \geq 0, \forall x \in D_f$ no caso de K ser par)

Todas as propriedades enunciadas são susceptíveis de serem alargadas ao caso de ser infinito o limite de uma função (ou de ambas as funções). Há, no entanto, algumas excepções que é necessário salvaguardar:

Formas Indeterminadas:

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0.\infty$ $\infty - \infty$ 1^{∞} ∞^{0} 0^{0}

Limites Notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}$

- Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D$. Diz-se que f é contínua uma se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Os pontos em que uma função não é contínua dizem-se pontos de descontinuidade.

- Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D$

f é contínua à esquerda em a se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

f é contínua à direita em a se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Nota: Se f for contínua à esquerda e à direita no ponto a, então f é contínua em a.

Teorema:

Toda a função constante é contínua em todos os pontos do domínio

- Uma função diz-se contínua num subconjunto A do seu domínio se for contínua em todos os pontos de A.

Nota: As funções polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e trigonométricas inversas são contínuas nos respectivos domínios.

Teorema

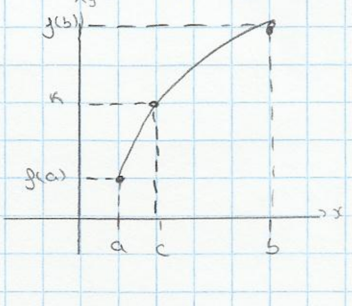
Se f e g são contínuas no ponto a, então $f+g$, $f-g$, $f \times g$ e f^n, $n \in \mathbb{N}$, são contínuas nesse ponto se $g(a) \neq 0$ então, também $\frac{f}{g}$ é contínua em a.

Teorema

Sejam $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $g(D_g) \subset D_f$. Se g é contínua em c e f é contínua em $g(c)$, então $f \circ g$ é contínua em c.

Teorema de Bolzano (ou dos valores intermédios)

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Então, para qualquer k estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um ponto c estritamente compreendido entre a e b, tal que $f(c) = k$.



Exemplo

Seja f definida em $\mathbb{R}$ por: $f(x) = x^2 - 2x$. Mostre que é verdadeira a proposição $\exists c \in]0,6[; f(c) = 15$

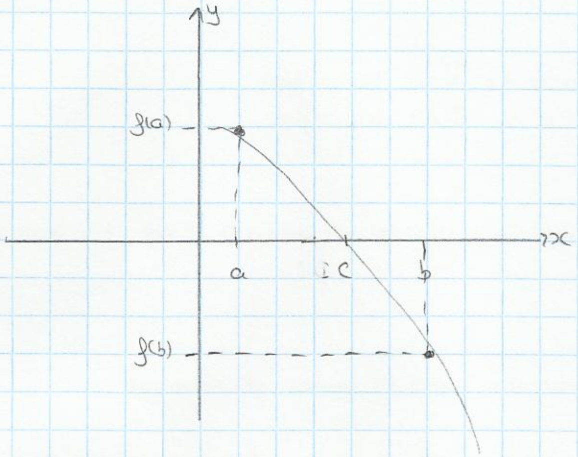
A função é contínua em $\mathbb{R}$ e portanto é contínua em qualquer intervalo fechado. Assim é contínua em $[0,6]$. Como $f(0)=0$ e $f(6)=24$, o teorema de Bolzano garante a veracidade da proposição. De facto $f(c) = c^2 - 2c \Leftrightarrow$

$$c^2 - 2c = 15$$
$$\Leftrightarrow c = 5 \vee c = -3$$

Como $0 < 5 < 6$ é verdadeira a proposição.

Corolário do Teorema de Bolzano

Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$, então a função admite pelo menos um zero no intervalo $]a,b[$.



[Resumo dos limites:

Apenas quando o x tende para uma constante (a) é que, em norma, se tem de calcular o limite à direita e à esquerda.

Quando o limite:

→ tem módulo, temos de desdobrar o módulo : $|x|$ $x \geq 0 \wedge x < 0$

→ temos funções trigonométricas, por norma é necessário efectuar uma substituição, e se é seno tentamos chegar ao limite notável

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1 \qquad \operatorname{cotg} = \frac{1}{\operatorname{tg}} \qquad \ldots \qquad \text{limite notável} : \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

→ Uma função só tem limite se os seus limites laterais são iguais

→ Quando temos de encontrar o k, temos de analisar os ramos que nos são dados e fazer os limites laterais

→ Quando temos uma função com polinómios, apenas consideramos os polinómios de maior grau.

→ Séries

Series Geométricas

$G = \sum_{n=0}^{\infty} a\underbrace{R}_{\text{razão}}^n$, com $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $R \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

- Se $R=1 \Rightarrow G = \sum_{n=0}^{\infty} a$ logo $x_n = a$ <u>G é divergente</u>
- Se $R=-1 \Rightarrow G = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a$ logo $x_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ <u>G é divergente</u>
- Se $R \neq 1, -1$

$$S_n = a \times \frac{1-R^{n-1}}{1-R} \quad \text{(Soma)}$$

a) se $|R| < 1 \Rightarrow R^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

logo $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \times \frac{1}{1-R}$

b) Se $|R| > 1$, R^{n+1} não converge logo a série <u>não é convergente</u>

Séries Harmónicas

$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

- $\alpha = 0 \Rightarrow G = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ <u>é divergente</u> porque não satisfaz a condição necessária de convergência. $x_n = 1 \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $\alpha < 0 \Rightarrow G = \underbrace{\sum n^{-\alpha}}_{\to +\infty}$ $(-\alpha > 0)$ <u>é divergente</u> porque não satisfaz a condição necessária de convergência $x_n = n^{-\alpha} \xrightarrow[\to\infty]{} +\infty$
- $\alpha > 0 \Rightarrow x_n = \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ <u>é convergente</u> (mas não basta)

a que $x_n = n^{-\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$

Teorema da Condensação de Cauchy

Seja $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq 0$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge sse a seguinte série converge.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k} = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_8 + \dots$$

Então, se fizermos $x_{2^k} = (2^k)^{-\alpha}$, $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq 0$

Portanto, $\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k}}_{\text{converge?}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k 2^{-k\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k-k\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-\alpha)}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k \rightarrow$ série geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} a R^k$ onde $R = 2^{1-\alpha}$ e $a=1$

logo a série: <u>converge</u> se $2^{1-\alpha} < 1 \Rightarrow 1-\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$

<u>diverge</u> se $2^{1-\alpha} \geq 1 \Rightarrow 1-\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1$

→ Critérios para Resolver Séries

↳ Critério da Razão

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos:

(i) Se existir $R: 0 \leq R < 1$ tal que a partir de certa ordem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

(ii) Se a partir de certa ordem se tem $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

↳ Critério de D'Alambert

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos reais não nulos e suponha-se que:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$$

(i) Se $L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge

(ii) Se $L > 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

↳ Teste da Raiz

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ uma série de termos reais e

$$R = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

(i) Se $R < 1$, a série converge absolutamente

(ii) Se $R > 1$, a série diverge

↳ Comparação do Limite

Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucessões de números reais positivos

(i) $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} \boxed{< \infty}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

(ii) $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} \boxed{> 0}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

[Séries (Truques):

→ Quando temos uma sucessão toda elevada a $\boxed{n}$ então usamos o critério da Raiz.
→ Quando temos um factorial $\boxed{n!}$ usamos por norma o Critério de D'Alambert
→ Quando temos uma sucessão $\frac{1}{\quad}$ normalmente usa-se a comparação do limite
(raiz complicada)

Teorema 1.7.6

Se $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e p um ponto de acumulação de D, então $\lim_{x \to p} f(x) = b$ sse para cada sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite p com $u_n \in D \setminus \{p\}$ a sucessão $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tem limite b.

Demonstração

$\Rightarrow$

Suponhamos que $\lim_{x \to p} f(x) = b$ e seja $(u_n) \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n \to +\infty} u_n = p$ vamos provar que $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = b$

dado $\varepsilon > 0 \ \exists \ \delta^{(\varepsilon)} > 0 : 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

dado $\delta > 0 \ \exists n_0 (\delta) : n > n_0 : |u_n - p| < \delta \Rightarrow |f(u_n) - b| < \varepsilon$

então obtivemos dado $\varepsilon > 0 \ \exists n_0 (\varepsilon) : n > n_0 : |f(u_n) - b| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = b$

$\Leftarrow$ Por redução ao absurdo

Suponhamos que $\lim_{x \to p} f(x) \neq b$ e vamos provar que existe uma sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\lim_{n \to +\infty} u_n = p$ e $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) \neq b$

Suponhamos que $\lim_{x \to p} f(x) \neq b \Rightarrow \exists \ \varepsilon > 0$ tal que:

$\delta = 1$ (não funciona): $\exists x_1 : |x_1 - p| < 1 \Rightarrow |f(x_1) - b| > \varepsilon$

$\delta = 1/2$ (não funciona): $\exists x_2 : |x_2 - p| < \frac{1}{2} \Rightarrow |f(x_2) - b| > \varepsilon$

δ_n $\quad \exists x_n : |x_n - p| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - b| > \varepsilon$

então temos $\lim_{n \to +\infty} u_n = p$ e $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq b$

Teorema 1.7.8

$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = b + c$ (1)

$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = b - c$

$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$

$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{b}{c} \quad c \neq 0$

Demonstração

(1) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = b + c$

Seja $\varepsilon > 0$

$|f(x) - g(x) - (b+c)| = f(x) - b + g(x) - c| \leq |f(x) - b| + |g(x) - c| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\varepsilon/2$

$\exists \delta_1 (\varepsilon/2) : |x - a| < \delta_1 (\varepsilon/2) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon/2$

$\exists \delta_2 (\varepsilon/2) : |x - a| < \delta_2 (\varepsilon/2) \Rightarrow |g(x) - c| < \varepsilon/2$

tomamos $x : |x - a| < \min(\delta_1, \delta_2)$

Teorema 17.9

Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e g uma função limitada numa vizinhança de a, então $\lim_{x \to a} [f(x) . g(x)] = 0$

Demonstração

$|f(x) g(x) - 0| = |f(x) g(x)| \leq = |f(x)| |g(x)| < M |f(x)| < M \frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon$

$|x - a| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\exists g_1 : |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| < M$ (sse g é limitado numa vizinhança de a)

dado $\varepsilon > 0$ qualquer tomaremos $\frac{\varepsilon}{M}$, então $\exists \delta_2 . (\frac{\varepsilon}{M}) > 0$ tal que $|x - a| < \delta_2$

$\Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$

Definições

Continuidade

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $p \in D \cap D'$. Dizemos que f é contínua em p sse

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x \in D \wedge |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$

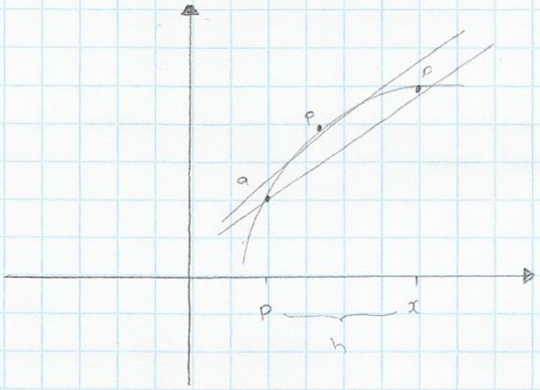
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $p \in D^{*} \cap D'$

f é contínua à esquerda de p se $\lim_{x \to p^-} f(x) = f(p)$

f é contínua à direita de p se $\lim_{x \to p^+} f(x) = f(p)$

Definição de Derivada. Regras de Derivação

Considere-se a curva que é o gráfico de uma função contínua. Sejam $P(a, f(a))$ e $Q(a+h, f(a+h))$ dois pontos do gráfico, onde h é o deslocamento no eixo das abcissas, ocorrido do ponto P ao ponto Q. A recta que passa por P e Q é secante à curva $y=f(x)$. O declive desta recta é dada pela razão $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, à qual se chama razão incremental de f no ponto a.



$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$$

↳ declive da recta tangente no ponto p.

- Quando $h \to 0$ e a razão incremental se aproxima de k, e $k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, diz-se que k é o limite da razão incremental com h a tender para zero, isto é, $k = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

- Se o limite da razão incremental existir e for finito, e a função f for contínua no ponto a, então a recta tangente à curva $y=f(x)$ no ponto $(a, f(a))$, será dada por $y = f(a) = k(x-a)$.

Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto interior a D. Chama-se derivada de f no ponto a ao limite, se existir $\lim_{h \to 0} \frac{(f(a+h)-f(a)}{h}$ ou, fazendo $x = a+h$; $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Denota-se a derivada de f no ponto a por $f'(a)$. Se f tem derivada finita em $x=a$ diz-se que é diferenciável em a.

Interpretação Geométrica

A derivada de f no ponto a, $f'(a)$, é o declive da recta tangente ao gráfico de f nesse ponto, a recta tangente terá então a equação:

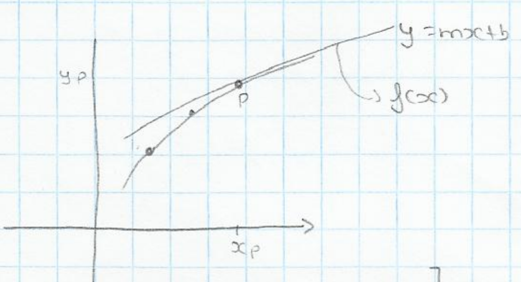
$$y = f(a) = f'(a)(x-a)$$

[Equação reduzida da recta:

$$y = mx + b \quad \Rightarrow \quad (y - f(a) = f'(a)(x-a))$$

em que

$$m = f'(p) \qquad f'(x)$$



]

Há por vezes pontos do domínio de uma função onde o estudo da diferenciabilidade exige que se determinem os limites laterais da razão incremental. Chamam-se a estes limites, se existirem, derivadas laterais:

- Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto interior a D. Chama-se derivada à esquerda de f no ponto a ao limite, se existir, $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ou fazendo $x-a=h$, $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

↳ Representa-se por $f'(a^-)$.

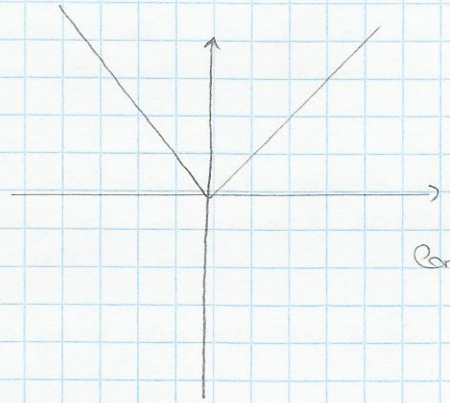
- Chama-se derivada à direita de f no ponto a ao limite, se existir $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, ou fazendo $x-a=h$, $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ...

↳ Representa-se por $f'(a^+)$.

Nota: A derivada de f no ponto a, $f'(a)$ existe sse existirem e são iguais $f'(a^+)$ e $f'(a^-)$.

[A função módulo não tem derivada no ponto 0

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$



$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ não tem derivada no ponto 0

]

A continuidade de uma função num ponto, e a existência de derivada nesse intervalo estão relacionados entre si:

Teorema:

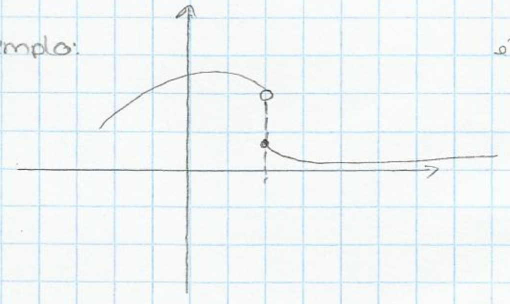
Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in int(D)$. Seja f diferenciável no ponto a, então f é contínua em a.

Notas:

- Uma função pode ser contínua num dado ponto e não ter derivada nesse ponto. Por exemplo $f(x) = |x|$ no ponto 0.
- Se a função não for contínua no ponto a, então f não é diferenciável nesse ponto
- Se a derivada for infinita, a função pode não ser contínua.

[

Por exemplo:



Se é diferenciável no ponto a, então é contínua em a.

$\not\Leftarrow$

Regras de Derivação

Teorema:

Se f e g são funções diferenciáveis em a, então $f+g$ e $f.g$ são funções diferenciáveis em a, e

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(f.g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a)^2)}$ se $\frac{f}{g}$ é diferenciável e $g(a) \neq 0$.

Teorema:

Se $g: D_1 \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a e $f: D_2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $b = g(a)$ então $f \circ g$ é diferenciável em a e $(f \circ g)'(a) = f'(b)\,g'(a) = f'(g(a))\,g'(a)$.

Teorema:

Sejam I um intervalo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua, $g: I = f(I) \to \mathbb{R}$ a sua inversa. Se f é diferenciável no ponto a e $f'(a) \neq 0$, então g é diferenciável em $b = f(a)$ e $g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$

↳ **Derivadas Mais Importantes**

$(\text{sen } x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\text{sen } x$

$(\text{tang } x)' = \begin{cases} 1 + \text{tang}^2 x \\ \sec^2 x \end{cases}$

$(\text{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

[Se f é diferenciável no ponto a e $f'(a) \neq 0$ então f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

]

Diferencial de uma Função

Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \text{int}(D)$ e $a+h \in D$. É usual chamar-se acréscimo ou incremento da função f, correspondente ao acréscimo h da variável x (dada a partir de a), à diferença $f(a+h) - f(a)$.

Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável num ponto interior a D. Chama-se diferencial da função f no ponto a, em relação ao acréscimo h, ao produto $f'(a)h$. Designa-se pelo símbolo

$d\, f(a(h))$. Isto é,

$$d.\, fa(h) = f'(a)h.$$

Observação: O diferencial da função f num dado ponto a (no qual f seja diferenciável) em relação a certo acréscimo h, é muitas vezes designado de forma abreviada por. $df(h)$ ou apenas df. Quando se põe $y = f(x)$ é usual notação de y para designar o diferencial num ponto a e relativo a um acréscimo h subentendido:

$$dy = f'(a)h$$

Aplicações do Diferencial uma função a cálculos aproximados

Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in int(D)$.
Seja t a recta tongente à curva $y = f(x)$ (gráfico de f) no ponto a, cujo declive é $m\,t$ é igual a $f'(a)$. Então:

$$f'(a) = \frac{dy}{h} \Rightarrow dy = f'(a)\,h$$

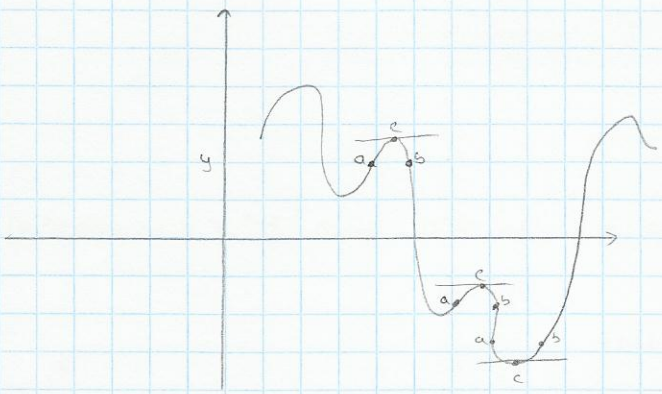
$$\Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + dy, \text{ isto é: } f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

Teoremas Fundamentais

Teorema de Rolle:

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$, $(a,b \in \mathbb{R}, a<b)$ e diferenciável em $]a,b[$
se $f(b) = f(a)$, então existe um $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Geométricamente: o teorema de Rolle afirma que na representação gráfica da função existe pelo menos um ponto onde a recta tangente é paralela ao eixo dos abcissas:



Corolário 1: Entre dois zeros de uma função diferenciável num intervalo, existe pelo menos um zero da sua derivada.

Corolário 2: Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável num intervalo, existe no máximo um zero da função, ou seja, se a e b forem dois zeros consecutivos da derivada da função, a função não pode ter mais do que um b.

Notas: Conjugando este resultado com o teorema de Bolzano sobre funções contínuas podemos afirmar que:

Se a função assumir valores de sinais contrários para dois zeros consecutivos da derivada, entre esses dois existe um zero da função.

Se o sinal for o mesmo, não há zero algum da função entre 2 zeros da derivada.