UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

GUSTAVO THEODORO LASKOSKI

FÓRMULAS DE TAYLOR E MACLAURIN

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

CURITIBA

JUNHO 2007

GUSTAVO THEODORO LASKOSKI

FÓRMULAS DE TAYLOR E MACLAURIN

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Trabalho referente a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I como enriquecimento curricular no Curso Superior de Tecnologia em Eletrônica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Profª. Girley Gogola

CURITIBA

JUNHO 2007

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesse trabalho serão apresentadas as Fórmulas de Taylor e MacLaurin. As fórmulas de Taylor e MacLaurin possibilitam o cálculo aproximado de algumas funções logarítimicas, exponenciais e trigonométricas a partir de uma função polinomial. Um exemplo típico é comprovado pelo seguinte limite fundamental do cálculo:

$$\lim_{x \Rightarrow 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$$

Para todo x com valor muito próximo de zero, a função $f(x) = sen\, x$ é aproximadamente calculada pelo polinômio $f(x) = x$. Conforme o aumento da ordem do polinômio, é possível fazer com que a função se aproxime cada vez mais do valor correspondente a curva. Por exemplo, considere a função exponencial natural $f(x) = \mathrm{e}^x$ para todo x pertencente aos reais. Para determinar os valores de $f(x)$ próximos de zero, basta determinar a reta tangente através de derivada da função no ponto, conforme representado na figura 1.

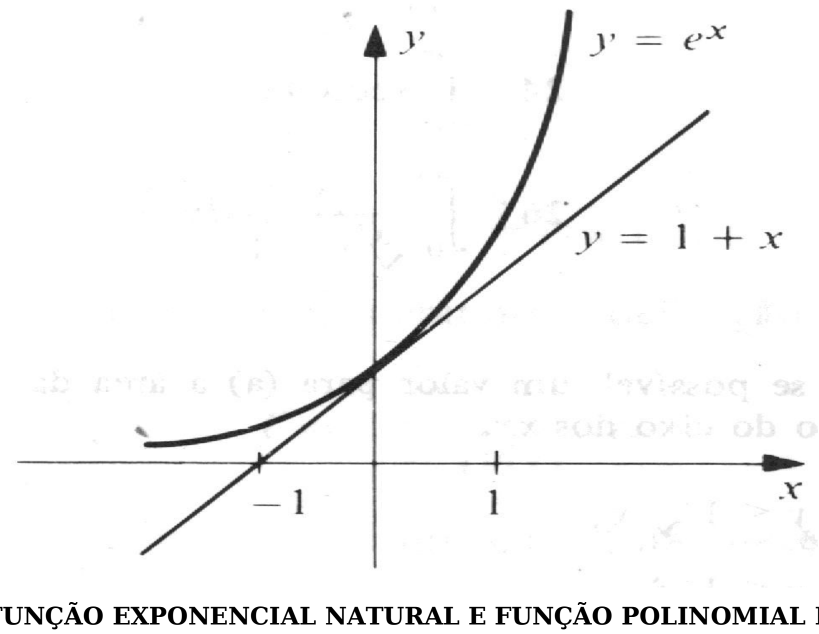

FIGURA 1 - FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL E FUNÇÃO POLINOMIAL DE 1ª ORDEM
Fonte: SWOKOWSKI. Cálculo com geometria analítica, página 534.

Como $f'(x)=e^x$, o coeficiente angular da reta tangente é $f'(0)=e^0=1.$ Portanto, a equação da reta tangente é:

$$y-1=1(x-0) \quad = \quad x+1$$

Conforme representado na figura 1, quanto mais próximo do zero, menor é o erro de aproximação entre o polinômio e a função. A função $f(x)=e^x$ pode ser representada por um polinômio de ordem superior. O polinômio de segunda ordem pode ser obtido através da função $g(x)=a+bx+cx^2$ logo, $g'(x)=b+2cx$ e $g''(x)=2c.$

Para encontrar os coeficientes de $g(x)$, basta fazer com que $g(0)=f(0), g'(0)=f(0)$ e g'(0) = f'(0). Portanto, $f(0)=f'(0)=f''(0)=e^0=1,$ logo, $a=1, b=1 \, e \, c=1/2.$ O polinômio de segundo ordem que representa o valor aproximado da função $f(x)=e^x$ quando x é próximo de zero é:

$$e^x \approx g(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$$

Outro método para determinar os polinômios de ordem superiores para a função $f(x)=e^x$ é através da integração da equação da reta tangente:

$$\int (x+1)\,dx=1+x+\frac{x^2}{2}+c$$

Se for realizada mais uma integração, é possível encontrar o polinômio de 3 ª ordem que se aproxima da função $f(x)=e^x$ quando x é próximo de zero.

$$e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}$$

Na figura 2 é apresentado o gráfico da função exponencial natural e a função polinomial do 3° grau. Quanto maior o grau da função polinomial equivalente a função exponencial, menor é o erro existente entre as funções num determinado ponto.

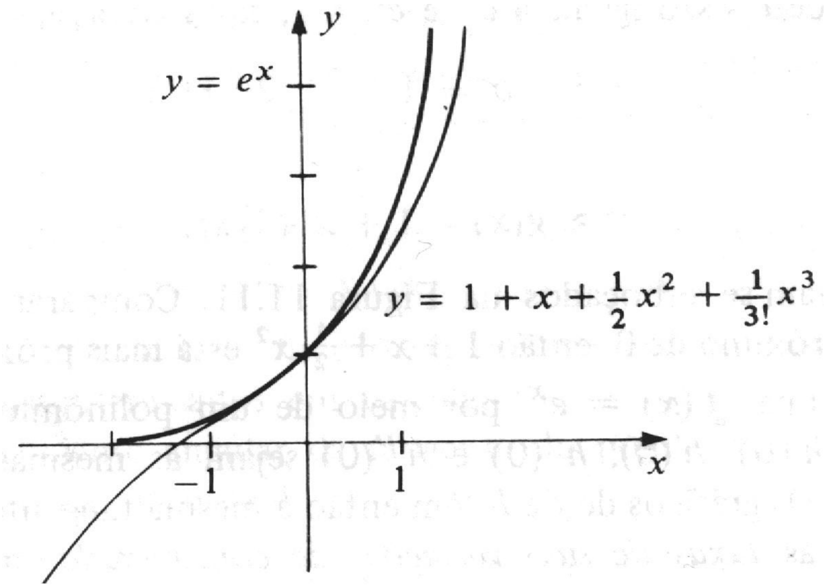

FIGURA 2 - FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL E FUNÇÃO POLINOMIAL DE 3ª ORDEM

Fonte: SWOKOWSKI. Cálculo com geometria analítica, página 536.

2 FÓRMULA DE TAYLOR

Seja f uma função e n um número inteiro positivo, tal que a derivada $f^{(n+1)}(x)$ exista para todo x em um intervalo *I*. Se a e x são números distintos em *I*. Então existe um número z entre a e x tal que:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{(n+1)}$$

A soma dos $n+1$ primeiros termos do membro direito da equação acima é denominado de **Polinômio de Taylor** $(P_x(n))$ de grau n de f no ponto a, ou seja:

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

O último termo da fórmula de Taylor é denominado de resto (R_n), ou seja:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$$

Portanto, o Polinômio de Taylor $(P_x(n))$ pode ser escrito como $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$. Se o valor de $R_n(x)$ for próximo de zero, então uma função $f(x)$ é aproximadamente igual ao Polinômio de Taylor $(P_x(n))$ de grau n de f no ponto a, ou seja:

$$f(x)\approx P_n(x),\ se\, x\approx a$$

Como o $|f(x)-P_n(x)|=|R_n(x)|$, então o erro existente entre uma função $f(x)$ e o polinômio de Taylor $(P_x(n))$ é igual ao valor absoluto de $R_n(x)$.

2.1 Exemplo

Considere a função $f(x)=\ln(x)$, determine a fórmula de Taylor para $n=3$ e $a=1$.

Resolução:

Se $n=3$, então é necessário determinar as quatro primeiras derivadas de $f(x)$, logo:

$$f(x)=\ln(x) \qquad f(1)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{x} \qquad f'(1)=1$$

$$f''(x)=\frac{-1}{x^2} \qquad f''(1)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{2}{x^{-3}} \qquad f'''(1)=2$$

$$f^{(4)}=\frac{-3!}{x^{4}} \qquad f^{(4)}(z)=\frac{-6}{z^{4}}$$

Portanto, a fórmula de Taylor da função $f(x)=\ln x$ é:

$$\ln x=0+\frac{1}{1!}\cdot(x-1)-\frac{1}{2!}\cdot(x-1)^2+\frac{2}{3!}\cdot(x-1)^3-6\frac{z^{-4}}{4!}\cdot(x-1)^4$$

$$\boxed{\mathbf{\ln(x)=(x-1)-\frac{1}{2}\cdot(x-1)^2+\frac{1}{3}\cdot(x-1)^3-\frac{1}{4}z^4\cdot(x-1)^4}}$$

Na figura 3 é apresentado o gráfico correspondente as funções $f(x)=\ln x$ e a sua função polinomial equivalente descrita pela equação acima.

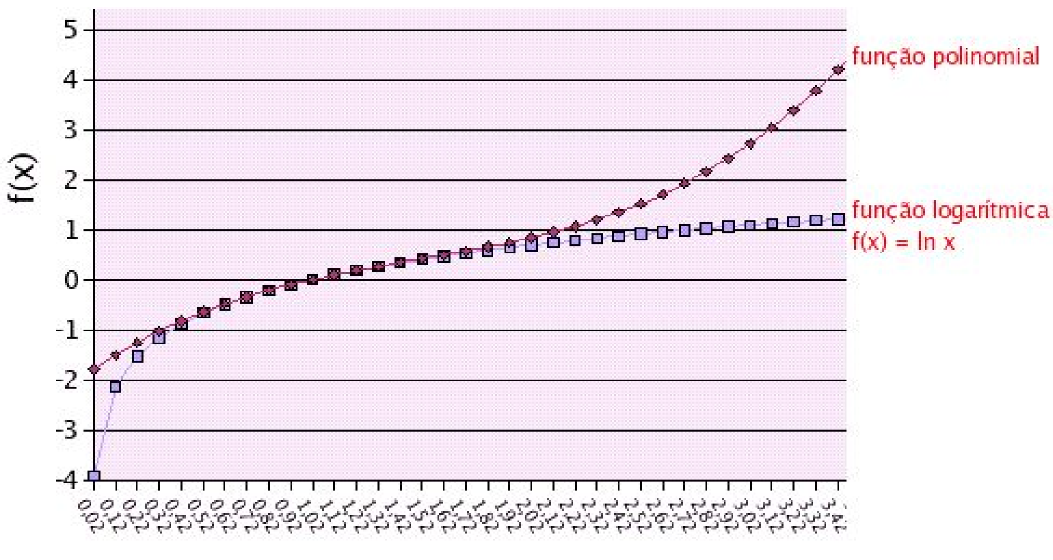

FIGURA 3 – FUNÇÃO LOGARÍTMICA E FUNÇÃO POLINOMIAL EQUIVALENTE

Fonte: Autoria própria. Open Office 1.1.2 (2007)

De acordo com a fórmula de Taylor, o erro entre uma função $f(x)$ e uma função polinomial equivalente aumenta quando o valor de x se afasta do ponto no eixo das abscissas cuja imagem vale zero. No caso da função $f(x)=\ln x$ (figura 3), o erro aumenta quando o valor de x se afasta do ponto $x(1{,}0)$.

3 FÓRMULA DE MACLAURIN

A fórmula de MacLaurin é um caso especial da fórmula de Taylor quando $a=0,$ ou seja:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\cdot x^{(n+1)}$$

O valor de z está entre 0 e $z,$ e assim como o polinômio de Taylor, o último termo do membro direito do polinômio corresponde ao resto.

3.1 Exemplo

Considere a função $f(x)=sen\,x,$ determine a fórmula de MacLaurin para $n=8.$

Resolução:

Como $n=8,$ é necessário encontrar as oito primeiras derivadas da função $f(x)=sen\,x.$

$$\begin{array}{ll}
f(x)=sen\,x & f(0)=0 \\
f'(x)=\cos x & f'(0)=1 \\
f''(x)=-sen\,x & f''(0)=0 \\
f'''(0)=-\cos x & f'''(0)=-1
\end{array}$$

As próximas derivadas seguem a mesma sequência acima, ou seja:

$$\begin{array}{ll}
f(x)=f^{(4)}(x)=f^{(8)}(x)=sen\,x & f^{(4)}(0)=f^{(8)}(x)=0 \\
f'(x)=f^{(5)}(x)=f^{(9)}(x)=\cos x & f^{(5)}(0)=f^{(9)}(x)=1 \\
f''(x)=f^{(6)}(x)=-sen\,x & f^{(6)}(0)=0 \\
f'''(x)=f^{(7)}(x)=-\cos x & f^{(7)}(x)=-1
\end{array}$$

Os coeficientes $x^2, x^4, x^6 e\, x^8$ são nulos pois as derivadas correspondente a cada termo quando $x=0$ são nulas. Então a fórmula de MacLaurin para a função $f(x)=sen\,x$ é:

$$sen\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{\cos z}{9!} \cdot x^9$$

Na figura 4 é apresentado o gráficos correspondentes as funções senoidal $f(x)=sen\,x$ e a sua função polinomial equivalente representada pela equação acima.

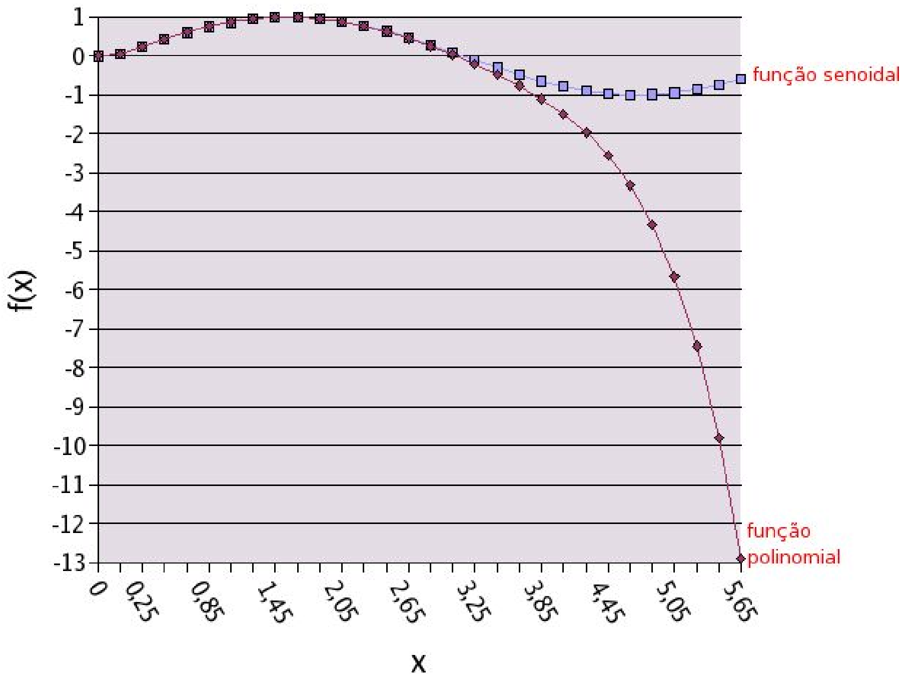

FIGURA 4 – FUNÇÃO SENOIDAL E FUNÇÃO POLINOMIAL EQUIVALENTE

Fonte: Autoria própria. Open Office 1.1.2 (2007)

4 SÉRIES DE REFERÊNCIA

A partir das Fórmulas de Taylor e MacLaurin foram obtidas as séries de referências para as funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. Entre as principais séries, pode-se citar:

4.1 Função exponencial com base neperiana

Pela fórmula de Taylor: $e^x = 1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} + \ldots$

Pela fórmula de MacLaurin: $e^x = 1 + x + \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x)^{(n-1)}}{(n-1)!} + \ldots$

Na figura 5 são apresentados os gráficos da função exponencial $f(x)=e^x$ e da função polinomial correspondente a fórmula de MacLaurin da função $f(x)=e^x$ para $n=6.$

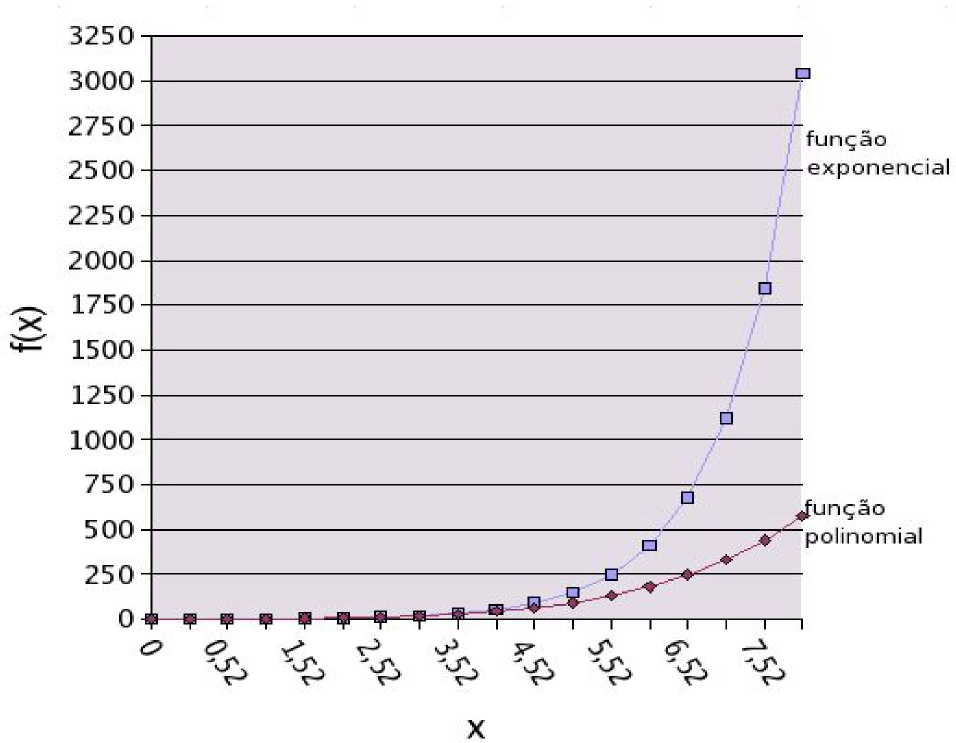

FIGURA 5 - FUNÇÃO EXPONENCIAL COM BASE NEPERIANA E FUNÇÃO POLINOMIAL

Fonte: Autoria própria. Open Office 1.1.2 (2007)

4.2 Função seno

A função senoidal $f(x)=sen\,x$ foi apresentada na figura 4, sendo utilizada a fórmula de MacLaurin para $n=8.$ As fórmulas Taylor e MacLaurin para n termos da função $f(x)=sen\,x$ são:

Fórmula de Taylor: $sen\,x = sen\,a + (x-a)\cdot\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!}\cdot sen\,a - \frac{(x-a)^3}{3!}\cdot\cos a + \ldots$

Fórmula de MacLaurin: $sen\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

4.3 Função co-seno

A função se diferencia da função senoidal pela mudança das identidades trigonométricas e de sinais de cada termo, pois a derivada da função $g(x) = sen\,x$ é $g'(x) = \cos x$ e a derivada de $f(x) = \cos(x)$ é $f'(x) = -\cos x.$ Portanto, as fórmulas de Taylor e MacLaurin da função $f(x) = \cos(x)$ são:

Fórmula de Taylor: $\cos x = \cos a - (x-a)\cdot sen\,a - \frac{(x-a)^2}{2!}\cdot\cos a + \frac{(x-a)^3}{3!}\cdot sen\,a + \ldots$

Fórmula de MacLaurin $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

Na figura 6 são apresentados os gráfico das função $f(x) = \cos(x)$ e da função polinomial correspondente a fórmula de MacLaurin da função $f(x) = \cos(x)$ para $n = 6.$

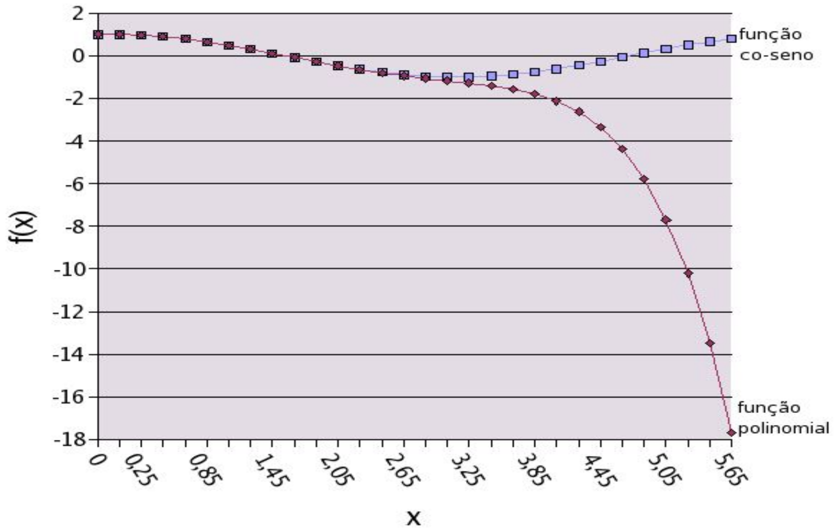

FIGURA 6 - FUNÇÃO CO-SENO E FUNÇÃO POLINOMIAL

Fonte: Autoria própria. Open Office 1.1.2 (2007)

4.5 Outras séries de referência

Algumas séries de referência são apresentadas utilizando apenas a fórmula de MacLaurin, pois a utilização da fórmula de Taylor resulta numa função maior que a função original. Por exemplo, é o caso das funções seno e co-seno que resultam numa função com somatório de funções seno e co-seno. As principais séries desenvolvidas a partir da fórmula de MacLaurin e com aplicabilidade são:

Função exponencial: $e^x = 1 + x + \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x)^{(n-1)}}{(n-1)!} + \ldots$

Função seno: $sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

Função co-seno: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

Função tangente: $tg\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots$

Função arc seno: $arc\, sen\, x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$

Função arc tangente: $arc\, tg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

Função seno hiperbólico: $senh\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$

Função co-seno hiperbólico: $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$

5 CONCLUSÂO

Nesse trabalho foram apresentados as fórmulas de Taylor e MacLaurin. Essas fórmulas possibilitam o cálculo aproximado de algumas funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas a partir de uma função polinomial. A fórmula de MacLaurin é um caso particular da fórmula de Taylor e tem a principal vantagem de desenvolver séries de funções polinomiais. No caso da fórmula de Taylor, o desenvolvimento de algumas séries resultam em expressões mais complexas em não apresentam muitas vantagens. As fórmulas de Taylor e MacLaurin são utilizadas para determinar as tabelas das funções trigonométricas, logarítmicas e exponenciais. Além disso, as fórmulas de Taylor e MacLaurin tem aplicações em sistemas microprocessados, pois possibilitam o cálculo aproximado de algumas funções com menor complexidade e conseqüentemente menor tempo de processamento.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com geometria analítica.** Tradução, Alfredo Alves de Faria. São Paulo. McGraw-Hill, 1983.

[2] AYRES, F. **Cálculo diferencial e integral: resumo da teoria, problemas resolvidos, problemas propostos.** Tradução, José Rodrigues de Carvalho. São Paulo. McGraw-Hill. Coleção Schaum.

[3] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo - Volume I.** Rio de Janeiro. LTC – Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição, 2001.