3. Cálculo Integral

3.1. Integral indefinido

No capítulo anterior, vimos como à custa de uma função f podemos determinar uma nova função f', a derivada de f. Vamos agora estudar o problema inverso, *primitivação*: dada uma função f encontrar uma função F tal que $F' = f$.

3.1.1. Definições

Primitiva
Seja $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, onde I é um intervalo ou uma união finita de intervalos disjuntos dois a dois. Uma função $F : I \to \mathbb{R}$ é chamada uma *primitiva* (ou *anti-derivada* ou *integral indefinido*) de f em I se $F' = f$. Neste caso, diz-se que f é *primitivável* em I.

Exemplo: A função $F(x) = 2x$ é uma primitiva da função $f(x) = 2$ em $\mathbb{R}$. Mas a função $G(x) = 2x + 1$ também satisfaz $F'(x) = 2 = f(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, logo é uma outra primitiva de f em $\mathbb{R}$. Mais, todas as funções do tipo $H(x) = 2x + c$, com c uma constante real, são primitivas de f.

Podemos assim concluir que se uma função admitir uma primitiva, essa primitiva não é única.

Teorema. *Seja F uma primitiva de f num intervalo I. Se G é outra primitiva de f em I, então existe uma constante real c tal que*

$$G(x) = F(x) + c, \quad \textit{para todo o } x \in I.$$

Como consequência deste resultado, ficamos a saber que se F for uma primitiva de uma função f num intervalo I, então todas as outras primitivas de F são da forma

$$F(x) + c, \quad \text{para todo o } x \in I,$$

sendo c uma constante real arbitrária. Denota-se esta família de primitivas de F no intervalo I por

$$\int f \ \text{ ou } \ \int f(x)\ dx \ \text{ ou } \ Pf(x).$$

No caso de I não ser um intervalo, mas sim uma reunião de intervalos, o resultado anterior não é válido. Podemos ter duas primitivas de uma função que não diferem de uma constante. Exemplo: Seja f a função definida em $I =]0,1[\cup]4,5[$ por $f(x) = 2$. As funções $F(x) = 2x,\ x \in I$ e $G(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 2x - 2, & 4 < x < 5 \end{cases}$ são duas primitivas de f em I e não diferem por uma constante.

O cálculo de primitivas vai basear-se num conjunto de regras: *regras de primitivação*. As regras mais simples, *primitivação imediata*, consistem em inverter a tabela de derivação, isto é, identificar uma função como a derivada de outra.

Exemplos:

1. $\int 0 \ dx = c, \ \ c \in \mathbb{R}$.

2. $\int x \ dx = \dfrac{x^2}{2} + c, \ \ c \in \mathbb{R}$.

   De um modo mais geral $\int x^p \ dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + c, \ p \neq -1, \ c \in \mathbb{R}$.

3. $\int e^x \ dx = e^x + c, \ \ c \in \mathbb{R}$.

4. $\int \dfrac{1}{x} \ dx = \ln|x| + c, \ \ c \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. $\int \operatorname{sen} x \ dx = -\cos x + c, \ \ c \in \mathbb{R}$.

6. $\int \cos x \ dx = \operatorname{sen} x + c, \ \ c \in \mathbb{R}$.

7. $\int \sec^2 x \ dx = \operatorname{tg} x + c, \ \ c \in \mathbb{R}$.

Regras de primitivação

1. Sejam f e g duas funções primitiváveis em I e $k \in \mathbb{R}$. Então as funções kf e $f + g$ também têm primitivas em I e

$$\int k\, f(x) \ dx = k \int f(x) \ dx,$$

$$\int \big[f(x) + g(x)\big] \ dx = \int f(x) \ dx + \int g(x) \ dx.$$

2. Se F é uma primitiva de f em I e g é derivável em I então

$$\int f(g(x))\, g'(x) \ dx = F(g(x)) + c, \ \ c \in \mathbb{R}.$$

Exemplos:

1. $\displaystyle\int 3x+1 \ \ dx = \int 3x \ \ dx + \int 1 \ \ dx = 3\int x \ \ dx + x + c_1 = 3\frac{x^2}{2} + c_1 + x + c_1 =$
$= \displaystyle\frac{3}{2}x^2 + x + \underbrace{c_1 + c_2}_{c} = \frac{3}{2}x^2 + x + c, \ \ c \in \mathbb{R}.$

2. $\displaystyle\int e^x \cos e^x \ \ dx = \operatorname{sen} e^x + c, \ \ c \in \mathbb{R}.$

3.1.2. Primitivação por partes

Vimos que a primitiva da soma é a soma das primitivas (consequência imediata da correspondente propriedade para as derivadas). Será que o mesmo se passa para o produto? Não, o que temos é o seguinte resultado:

Teorema. *[Primitivação por partes] Sejam f e g duas funções definidas num intervalo I tais que f admite uma primitiva F em I e g é derivável em I. Então*

$$\int f(x)\, g(x) \ \ dx = F(x)\, g(x) - \int F(x)\, g'(x) \ \ dx.$$

Para saber por que factor devemos começar a primitivar, quando são conhecidas as primitivas das duas funções, temos a seguinte regra:

> Deve-se começar a primitivar pelo factor que menos se simplifica por derivação.

Exemplos:

1. $\displaystyle\int x\, e^x \ \ dx = e^x\, x - \int e^x\, 1 \ \ dx = x\, e^x - e^x + c, \ c \in \mathbb{R}.$

2. $\displaystyle\int \ln x \ \ dx = \int 1 \ \ln x \ \ dx = x\, \ln x - \int x\frac{1}{x} \ \ dx = x\, \ln x - \int 1 \ \ dx = x\,(\ln x - 1) + c, \ c \in \mathbb{R}.$

3. $\displaystyle\int e^x \ \cos x \ \ dx = e^x \ \cos x + \int e^x \ \operatorname{sen} x \ \ dx = e^x \ \cos x + e^x \ \operatorname{sen} x - \int e^x \ \cos x \ \ dx.$

   Logo $\displaystyle\int e^x \ \cos x \ \ dx = \frac{1}{2} e^x(\cos x + \ \operatorname{sen} x) + c, \ c \in \mathbb{R}.$