Análise Matemática I

→ Resumo de Conceitos Importantes

Intercepção : $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$

União : $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Principais Conjuntos de Números

$\mathbb{N}$: nº naturais	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$: nº inteiros	$\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1 \dots\}$
$\mathbb{Q}$: nº racionais	$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}/\{0\}\}$
$\mathbb{R}$: nº reais	$\mathbb{R}$: $\mathbb{Q} \cup$ {números irracionais}

– Conjunção – de 2 condições em $\mathbb{R}$ é a condição que é verificada pelos números reais que verificam simultaneamente as duas condições

– Disjunção – de 2 condições em $\mathbb{R}$ é a condição que é verificada pelos números reais que verificam pelo menos uma das condições

Condições		Conjuntos
Disjunção $\vee$	$\longrightarrow$	Reunião $\cup$
Conjunções $\wedge$	$\longrightarrow$	Intercepção $\cap$

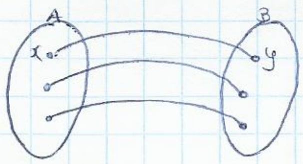
Módulo

$|x| \leq a \iff x \leq a \wedge x \geq -a$

$|x| \geq a \iff x \geq a \wedge x \leq -a$

Funções

Correspondência entre dois conjuntos A e B

objecto ∈  → imagem

x - variável independente
y - variável dependente

domínio - Conjunto dos valores reais que têm imagem pela função f. Eixo dos xx's

contradomínio - Conjunto dos valores reais que são imagem pela função f dos elementos do domínio. Eixo dos YY's

Zero - todo o objecto que tem imagem nula.

f é $\boxed{\text{crescente}}$ -> conforme o valor de x aumenta o valor da imagem de $x(y)$ também aumenta.

f é $\boxed{\text{estritamente crescente}}$ -> está sempre a crescer

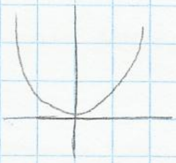
f é $\boxed{\text{decrescente}}$ -> conforme o valor de x aumenta o valor da imagem de $x(y)$ decresce

f é $\boxed{\text{estritamente crescente}}$ -> está sempre a decrescer

monótona - se é crescente ou decrescente

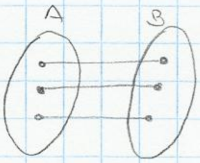
estritamente monótona - estritamente crescente ou estritamente decrescente

par - $f(-x) = f(x)$



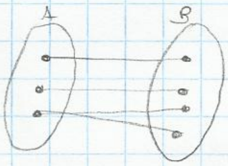
ímpar - $f(-x) = -f(x)$

Injectiva



Elemento de A só tem uma imagem em B

Sobrejectiva



Todos os elementos de B têm de ter imagem em A

Bijectiva

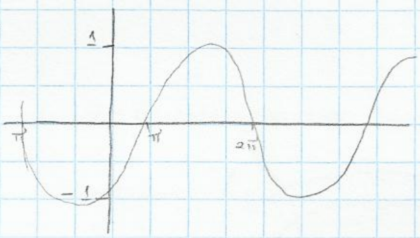
↓

Injectiva e Sobrejectiva

Funções Trigonométricas

Seno

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{oposto}}{\text{hipotenusa}}$$



$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \text{sen}\,x$$

-> Domínio: $\mathbb{R}$
-> Contradomínio: $[-1, 1]$
-> Função ímpar: $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x$
-> Função Periódica: 2π
-> Expressão Geral dos zeros: $x = k\pi$
-> Máximo: 1 quando $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
-> Mínimo: -1 quando $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

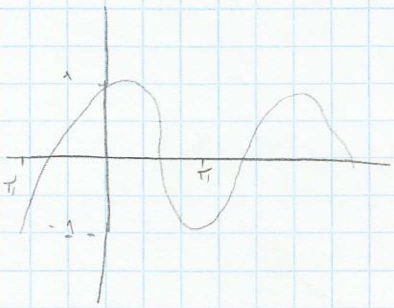
$\mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$
ímpar $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x$
período: 2π
zeros $k\pi$

Coseno

$\cos \theta = \frac{\text{adjacente}}{\text{hiptenusa}}$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \cos x$



- -> Domino: $\mathbb{R}$
- -> Contradominio: $[-1, 1]$
- -> Função Par: $\cos(-x) = \cos x$
- -> Função Periodica: 2π
- -> Expressão Geral dos zeros: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- -> Máximo $= 1$, $x = k2\pi$
- -> Mínimo $= -1$, $x = -k2\pi$

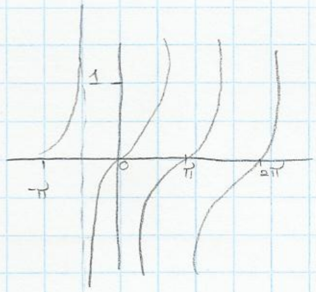
$\mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$
Par $\cos(-x) = \cos x$
periodo: 2π
Zeros: $\frac{\pi}{2} + k\pi$

Tangente

$tg\, \theta = \frac{\text{oposto}}{\text{adjacente}}$

$h: \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto tg\, x$



- -> Dominio: $\{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi + \pi/2\}$
- -> Contradominio: $\mathbb{R}$
- -> Função Impar: $tg(-x) = -tg\, x$
- -> Função Periodica: π
- -> Expressão Geral dos zeros: $x = k\pi$

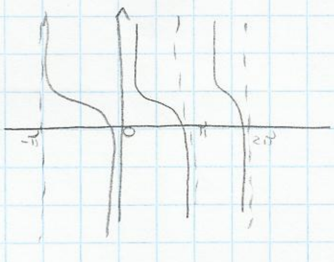
$]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$
impar $tg(-x) = -tg\, x$
periodo π
zeros: $k\pi$

Co-Tangente

$cotg\, \theta = \frac{\cos}{\text{sen}}$

$i: \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto cotg\, x$



- -> Dominio: $\{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi\}$
- -> Função Impar: $cotg(-x) = -cotg(x)$
- -> Função Periodica: π
- -> Expressão Geral dos zeros: $x = \pi/2 + k\pi$

$\mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$
impar $cotg(-x) = -cotg\, x$
periodo π
zeros: $\pi/2 + k\pi$

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
co-tg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

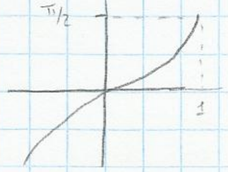
Funções Trigonométricas Inversas

Arco-Seno

$f^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

arcsen

$[-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$



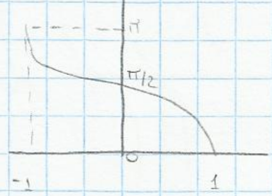
Arco-Coseno

$g^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$

$x \longmapsto \arccos x$

arccos

$[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$



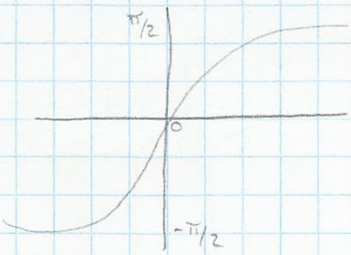
Arco-Tangente

$h^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[$

$x \longmapsto \text{arctg}\, x$

arctg

$\mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[$



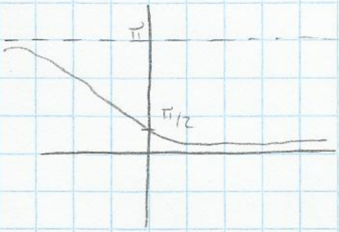
Arco-Co-tangente

arccotg

$\mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[$

$i^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[$

$x \longmapsto \text{arccotg}\, x$



Noções Topológicas em IR

③

→ Vizinhança de raio ε de b - designa-se por $V_\varepsilon(b)$ ao conjunto $]b-\varepsilon; b+\varepsilon[$

Interior (int(a)) - é o conjunto dos pontos interiores de C.
[abrir o intervalo]

Fronteira (fr(a)) - Diz-se que b é fronteira a C se toda a vizinhança de b contiver pelo menos de C e contiver pelo menos um ponto de $\mathbb{R} \setminus C$.
[todos os pontos do intervalo]

Exterior (ext(a)) - b é ponto exterior de C se b é um ponto interior de $\mathbb{R} \setminus C$
[pontos que não estão no interior]

Fecho ou Aderência ($\bar{a}$) - conjunto $C = int(a) \cup fr(a)$

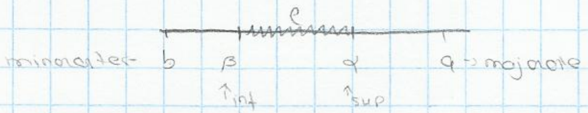
É $\boxed{\text{aberto}}$ se $C = int(C)$
É $\boxed{\text{fechado}}$ se $C = \bar{C}$

Ponto de Acumulação - pontos para o qual a expressão se aproxima.

Derivado - Conjunto dos pontos de acumulação (A') → ponto para onde a sucessão caminha
[geralmente é igual ao fecho]

Ponto Isolado - se existir uma vizinhança de b que não contem pontos de $C \setminus \{b\}$

Majorante - a é majorante se: $x \leq a$, $\forall x \in C$
Minorante - b é minorante se ~~bx~~ $\leq x$, $\forall x \in C$



O menor dos majorantes é chamado supremo
O maior dos minorantes é chamado ínfimo

C diz-se majorado se tem majorantes
C diz-se minorante se tem minorantes } limitado

Se o sup(C) ∈ C é máximo
Se o inf(C) ∈ C é mínimo

Sucessões de Números Reais

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \rightarrow (u_n)$$

(u_n) → termo geral

Progressão Aritmética de razão R

$$u_{n+1} - u_n = R$$

Soma:

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

Termo Geral: $u_n = u_1 + (n-1)R$

Progressão Geométrica de razão R

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = R$$

Soma:

$$S_n = u_1 \cdot \frac{1-R^n}{1-R}$$

Termo Geral: $u_n = u_1 \cdot R^{n-1}$

Limitada Superiormente - se o conjunto dos termos for majorado
Limitada Inferiormente - se o conjunto dos termos é minorado
Limitada - se o conjunto dos termos for limitado.

Monótona Crescente - $u_{n+1} \geq u_n$

Monótona Decrescente $u_{n+1} \leq u_n$

Infinitamente Grande Positiva - tende para $+\infty$)

Infinitamente Grande Negativa - tende para $-\infty$

Infinitamente Grande em Módulo - $|u_n| \Rightarrow +\infty$

Convergente - é convergente para um nº a ou $\lim u_n = a$, se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ p \in \mathbb{N}$

$$u_n \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\text{ para } \forall n > p$$

↳ Se não é convergente é divergente

Infinitésimo - tende para 0

Teoremas:

- O limite de uma sucessão convergente é único (1)
- O limite de uma sucessão constante é a própria constante (2)
- Toda a sucessão convergente é limitada
- Toda a sucessão monótona e limitada é decrescente.

Sucessão de Cauchy

- ↳ Qualquer sucessão de Cauchy é limitada
- ↳ Toda a sucessão limitada tem subsucessões convergentes
- ↳ Uma sucessão é convergente sse é uma sucessão de Cauchy
- ↳ Toda a sucessão convergente é limitada

Demonstrações:

(1) O limite de uma sucessão convergente é único.

Supanhamos por absurdo que:

a) $\lim_{n\to+\infty} u_n = c_1$

b) $\lim_{n\to+\infty} u_n = c_2$

c) $c_1 \neq c_2$

a) $\forall \varepsilon>0 \ \exists c_1 \in \mathbb{N} : u_n \in V_\varepsilon(c_1) \quad \forall n > p_1$

b) $\forall \varepsilon>0 \ \exists c_2 \in \mathbb{N} : u_n \in V_\varepsilon(c_2) \quad \forall n > p_2$

Mas seja $\bar{\varepsilon} = \frac{|c_1 - c_2|}{3}$

i.e.

$V_{\bar{\varepsilon}}(c_1) \cap V_{\bar{\varepsilon}}(c_2) = \emptyset$

quer dizer que não é possivel

$u_n \in V_{\bar{\varepsilon}}(c_1) \wedge u_n \in V_{\bar{\varepsilon}}(c_2), \ \forall n > \bar{p}$

$\bar{p} \geqslant \max\{p_1, p_2\}$

Logo temos uma contradição

Logo, $c_1 = c_2$

a) $\lim_{n\to+\infty} u_n = c_1$

b) $\lim_{n\to+\infty} u_n = c_2$

c) $c_1 \neq c_2$

a) $\forall \varepsilon>0 \ \exists c_1 \in \mathbb{N} : u_n \in V_\varepsilon(c_1) \quad \forall n > p_1$

b) $\forall \varepsilon>0 \ \exists c_2 \in \mathbb{N} : u_n \in V_\varepsilon(c_2) \quad \forall n > p_2$

Mas seja $\bar{\varepsilon} = \frac{|c_1 - c_2|}{3}$

i.e.

$V_{\bar{\varepsilon}}(c_1) \cap V_{\bar{\varepsilon}}(c_2) = \emptyset$

quer dizer que não é possivel

$u_n \in V_{\bar{\varepsilon}}(c_1) \wedge u_n \in V_{\bar{\varepsilon}}(c_2), \ \forall n > \bar{p}$

$\bar{p} \geqslant \max\{p_1, p_2\}$

Logo temos uma contradição

Logo $c_1 = c_2$

(2) O limite de uma sucessão constante é a própria constante

Seja $u_n = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Por absurdo vou assumir que:

$\lim_{n\to+\infty} u_n = c_0 \neq c$

$(\Rightarrow) \ \forall \varepsilon>0 \ \exists p \in \mathbb{N} : u_n \in V_\varepsilon(c_0) \quad \forall n > p$

$(\Rightarrow) \ \forall \varepsilon>0 \quad c \in V_\varepsilon(c_0)$

seja $\bar{\varepsilon} = \frac{|c - c_0|}{2}$ temos que $c \notin V_{\bar{\varepsilon}}(c_0)$ logo

é falso, ou seja, $c = c_0$

Seja $u_n = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Por absurdo vou assumir que

$\lim_{n\to+\infty} u_n = c_0 \neq c$

$(\Rightarrow) \ \forall \varepsilon>0 \ \exists p \in \mathbb{N} : u_n \in V_\varepsilon(c_0) \quad \forall n > p$

$(\Rightarrow) \ \forall \varepsilon>0 \quad c \in V_\varepsilon(c)$

Seja $\bar{\varepsilon} = \frac{|c - c_0|}{2}$ temos $c \notin V_{\bar{\varepsilon}}(c_0)$ logo

é falso, ou seja, $c = c_0$

O limite de uma sucessão é único.

Vamos supor por absurdo que:

a) $\lim_{n \to +\infty} u_n = c_1$;

b) $\lim_{n \to +\infty} u_n = c_2$;

c) $c_1 \neq c_2$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_1 \in \mathbb{N} : u_n \in V_\varepsilon(c_1) \quad \forall n > p_1$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_2 \in \mathbb{N} : u_n \in V_\varepsilon(c_2) \quad \forall n > p_2$

Mas seja:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{|c_1 - c_2|}{3}$$

i.e:

$V_{\bar{\varepsilon}}(c_1) \cap V_{\bar{\varepsilon}}(c_2) = \emptyset$ mas não é possível

$u_n \in V_{\bar{\varepsilon}}(c_1) \wedge u_n \in V_{\bar{\varepsilon}}(c_2) \quad \forall n > \bar{p}$

$\bar{p} \geq \max\{p_1, p_2\}$

Logo temos uma contradição, $c_1 = c_2$

Limite de uma sucessão constante é a própria constante

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = c$

Vamos supor por absurdo que

$\lim_{n \to +\infty} u_n = c_0, \quad c \neq c_0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : u_n \in V_\varepsilon(c_0) \quad \forall n > p$

$\forall \varepsilon > 0 \quad c \in V_\varepsilon(c_0)$ (1)

Mas seja $\bar{\varepsilon} = \frac{|c - c_0|}{2}$

Logo $c \notin V_{\bar{\varepsilon}}(c_0)$, logo (1) é falso, $c_1 = c$

Definição de limite

Seja a um ponto de acumulação de domínio D da função $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diz-se que $b \in \mathbb{R}$ é limite de f no ponto a

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

$$\forall \delta > 0 \; \exists \varepsilon > 0 : x \in D \wedge |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$$

$\delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$

Continuidade

Uma função tem limite sse

$f(x) = f(a)$ f é contínua à esquerda
$f(x) = f(a)$ f é contínua à direita
$f(a)$ f é contínua no ponto

> os limites laterais têm de ser iguais

Os pontos em que a função não é contínua, dizem-se pontos de descontinuidade.

Teorema de Bolzano

f contínua em $[a,b]$ tal que $f(a) \neq f(b)$ $\forall k$ compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ $\exists$ um ponto entre a e b, tal que $f(c) = k$.

f contínua em $[a,b]$ $f(a) \neq f(b)$ $\forall k$ compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ $\exists$ um c entre a e b $f(c) = k$

Corolário de Bolzano

Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$, então existe pelo menos um zero no intervalo $[a,b]$

Teorema de Weierstrass

f é contínua em $[a,b]$
f definida em $[a,b]$
$\Rightarrow f([a,b]) = [m, M]$

$\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = m$
$\exists x_1 \in [a,b] : f(x_1) = M$

Critérios

→ Séries Geométricas

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} a R^n \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ e } R \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\boxed{R = 1} \Rightarrow G = \sum_{n=1}^{\infty} a$ logo $x_n \neq 0$ G é divergente

$\boxed{R = -1} \Rightarrow G = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a$ logo $x_n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$ G é divergente

$\boxed{R \neq 1 \text{ e } -1}$

$$S_n = a \times \frac{1 - R^{n-1}}{1 - R}$$

Se $\boxed{|R| < 1} \Rightarrow R^{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ logo $S_n = a \times \frac{1}{1-R}$

$|R| > 1$, R^{n+1} não converge logo a série não é convergente

Séries Harmónicas

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

. $\boxed{\alpha = 0}$ $\Rightarrow$ $G = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ é divergente (pq ñ satisfaz a condição necessária de convergência)

. $\boxed{\alpha < 0}$ $\Rightarrow$ $G = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ $(-\alpha > 0)$ é divergente

. $\boxed{\alpha > 0}$ $\Rightarrow$ $x_n = \frac{1}{n^{\alpha}} \longrightarrow 0$ é convergente

Teorema da Condensação de Cauchy

$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq 0$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge sse

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^k x_{2^k} = x_1 + 2x_2 + 4x^4 \dots$$

$\hookrightarrow x_{2^k} = (2^k)^{-\alpha}$

→ converge: $2^{1-\alpha} < 1$

→ diverge: $2^{1-\alpha} \geq 1$

Critério da Razão

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos:

i se existir R: $0 \leq R \leq 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \text{então converge}$$

ii Se a partir de certa ordem se tem $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ então diverge

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \Leftrightarrow \begin{cases} < 1 & \text{converge} \\ \geq 1 & \text{divergente} \end{cases}$$

Critério D'Alambert

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos reais não nulos

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \longrightarrow L$$

i $L < 1$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge

ii $L > 1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \begin{cases} > 1 & \text{diverge} \\ < 1 & \text{converge} \end{cases}$$

Teste da Raiz

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos reais:

$$R = \sqrt[n]{|c_n|}$$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \begin{cases} >1 & \text{diverge} \\ <1 & \text{converge} \end{cases}$$

i se $\boxed{R<1}$ converge absolutamente

ii se $\boxed{R>1}$ a série diverge

Comparação do limite

Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessões de números reais positivos

i $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \boxed{<\infty}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ a_n converge

ii $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \boxed{>0}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow$ a_n diverge

Teste de Leibniz

Se $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$ e $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

então a série alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad \text{converge}$$

ou seja a_n converge sse:

1º $a_n > 0$
2º $\lim a_n = 0$
3º a_n é decrescente

Se a série dos módulos for convergente e a convergencia também for simples diz-se que é absolutamente convergente.