



Análise Matemática I- B, C, D, E

1º Teste

24 de Abril de 2010

Duração: 2h

1. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 3}{1 - |x|} \geq 0\}$ e $B = \{3^{n/2} : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Mostre que $A = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$.

(b) Calcule $\text{int}(A \cup B)$ e $\text{fr}(A \cup B)$. Será $A \cup B$ um conjunto aberto? Justifique.

(c) Determine, ou justifique que não existe, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de B .

(4,5 valores)

2. Calcule os limites das seguintes sucessões, apresentando todos os cálculos efectuados:

(a) $\sqrt[n]{3^n + n}$;

(b) $\sum_{k=0}^n \frac{n+1}{\sqrt{3n^4 + k}}$.

(3 valores)

3. Considere

$$f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Mostre, usando o Princípio de Indução Matemática, que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+2)^{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(2 valores)

4. Calcule, justificando

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left((x^2 + 1)^{1/\arctan x} \right).$$

(1,5 valores)

(v.s.f.f)

5. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} |x|e^x & \text{se } x < 1 \\ \frac{x^2}{x+1} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Determine o domínio de f .
- (b) Estude f quanto à continuidade em $x = 1$.
- (c) Determine a função derivada f' .
- (d) Calcule, justificando, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(6 valores)

6. (a) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}$. Suponha que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

Use o teorema de Lagrange para provar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0.$$

(b) Use a alínea anterior para justificar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)^a - x^a) = 0,$$

onde $a \in]0, 1[$.

(3 valores)

RESOLUÇÃO

(com notas explicativas)

1. (a) Dado que

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3},$$

$$\text{e } 1 - |x| = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \text{ ou } 1 - (-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1,$$

podemos construir o quadro de sinais seguinte:

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 - 3$	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$1 - x $	-	-	-	0	+	0	-	-	-
$\frac{x^2 - 3}{1 - x }$	-	0	+	ss	-	ss	+	0	-

Podemos então concluir que os elementos que verificam a condição $\frac{x^2 - 3}{1 - |x|} \geq 0$ são os que pertencem a $[-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}]$. Logo,

$$A = [-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}].$$

- (b) Temos que $B = \{\sqrt{3}, 3, \sqrt{3^3}, 3^2, \dots\}$.

Assim, $\text{int}(A \cup B) =]-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}[$ e $\text{fr}(A \cup B) = \{-\sqrt{3}, -1, 1\} \cup B$.

$A \cup B$ não é um conjunto aberto pois há elementos de $A \cup B$ que não pertencem a $\text{int}(A \cup B)$ como, por exemplo, 3.

- (c) Como $3^{n/2}$ é uma sucessão crescente e $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n/2} = +\infty$, o conjunto B não é majorado não tendo, por isso, nem supremo nem máximo.

Uma vez que $3^{n/2}$ é uma sucessão crescente o primeiro elemento desta sucessão, $\sqrt{3}$, é um infimo de B e, dado que pertence ao conjunto, é também o mínimo de B .

2. (a) Dada uma sucessão $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, sabemos que, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = b$ então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = b$.

Uma vez que $3^n + n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, calculemos $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} + n + 1}{3^n + n}$.

Dividindo ambos os termos da fracção por 3^{n+1} , obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} + n + 1}{3^n + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{n}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{3^n}{3^{n+1}} + \frac{n}{3^{n+1}}},$$

uma vez que, como sabemos, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0, \forall p \in \mathbb{N}, \forall a > 1$, podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overset{1}{\cancel{3^{n+1}}} + \overset{0}{\cancel{\frac{n}{3^{n+1}}}} + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{3^{n+1}}}}}{\overset{\frac{1}{3}}{\cancel{\frac{3^n}{3^{n+1}}}} + \overset{0}{\cancel{\frac{n}{3^{n+1}}}}} = \frac{1 + 0 + 0}{\frac{1}{3} + 0} = 3.$$

Logo, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3^n + n} = 3$.

(b) Temos,

$$\sum_{k=0}^n \frac{n+1}{\sqrt{3n^4+k}} = \frac{n+1}{\sqrt{3n^4}} + \frac{n+1}{\sqrt{3n^4+1}} + \cdots + \frac{n+1}{\sqrt{3n^4+n}}.$$

Uma vez que temos $n+1$ parcelas, que $\frac{n+1}{\sqrt{3n^4}}$ é a parcela maior enquanto $\frac{n+1}{\sqrt{3n^4+n}}$ é a parcela mais pequena, podemos concluir que:

$$\frac{(n+1)^2}{\sqrt{3n^4+n}} \leq \sum_{k=0}^n \frac{n+1}{\sqrt{3n^4+k}} \leq \frac{(n+1)^2}{\sqrt{3n^4}}.$$

Por outro lado,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{\sqrt{3n^4+n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{n^2}}{\frac{\sqrt{3n^4+n}}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overset{1}{\cancel{\frac{n^2}{n^2}}} + \overset{0}{\cancel{\frac{2n}{n^2}}} + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{n^2}}}}{\sqrt{\overset{3}{\cancel{\frac{3n^4}{n^4}}} + \cancel{\frac{n}{n^4}}}} = \frac{1+0+0}{\sqrt{3+0}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Analogamente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{\sqrt{3n^4}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{n^2}}{\frac{\sqrt{3n^4}}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overset{1}{\cancel{\frac{n^2}{n^2}}} + \overset{0}{\cancel{\frac{2n}{n^2}}} + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{n^2}}}}{\sqrt{\overset{3}{\cancel{\frac{3n^4}{n^4}}}}} = \frac{1+0+0}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, pelo Teorema das Sucessões Enquadradas, podemos garantir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n+1}{\sqrt{3n^4+k}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3. A propriedade que queremos provar é $P(n) : f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+2)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Comecemos por provar que $P(1)$ é válida. Temos:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x+2} \right)' = \frac{0-1}{(x+2)^2} = (-1)^1 \frac{1!}{(x+2)^{1+1}},$$

logo $P(1)$ é válida.

Hipótese de Indução: $P(k)$ é válida, isto é, $f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{(x+2)^{k+1}}$.

Hipótese de Indução: $P(k+1)$ é válida, isto é, $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{(x+2)^{(k+1)+1}}$.

(Dito de outra forma: vamos mostrar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$)

Sabemos que

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))'.$$

Por hipótese de indução,

$$\begin{aligned}(f^k(x))' &= \left((-1)^k \frac{k!}{(x+2)^{k+1}} \right)' = (-1)^k \frac{0 - k!(k+1)(x+2)^k}{((x+2)^{k+1})^2} = \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!(x+2)^k}{(x+2)^{2k+2}} = (-1)^{k+1} \frac{(k+1)}{(x+2)^{(k+1)+1}}.\end{aligned}$$

Temos, então, que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ e, pelo Princípio de Indução Matemática, podemos concluir que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+2)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. Ao calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left((x^2 + 1)^{1/\arctan x} \right)$ obtém-se uma indeterminação do tipo 1^∞ .

Uma vez que $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, podemos efectuar a seguinte manipulação algébrica,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left((x^2 + 1)^{1/\arctan x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\log \left((x^2 + 1)^{1/\arctan x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\arctan x} \log(x^2 + 1)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 + 1)}{\arctan x}}\end{aligned}$$

Ao calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 + 1)}{\arctan x}$ obtém-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Vamos aplicar a regra de Cauchy ao cálculo deste limite considerando $f(x) = \log(x^2 + 1)$ e $g(x) = \arctan x$.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ e } g'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Estamos em condições de aplicar a regra de Cauchy porque,

- f e g são diferenciáveis num intervalo do tipo $] -a, a[$, $a > 0$ porque as derivadas tomam valores finitos neste intervalo.
- $g'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \neq 0$ em $] -a, a[$, $a > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

Como, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{\frac{1}{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ existe, concluímos que também existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e tem igual valor. Assim

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left((x^2 + 1)^{1/\arctan x} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 + 1)}{\arctan x}} = e^0 = 1.$$

5. (a) O domínio da função f é dado pelo seguinte conjunto:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < 1 \vee (x \geq 1 \wedge x \neq -1)\} = \mathbb{R}$$

(b) Sabendo que

$$f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2} = f(1)$$

e que

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x|e^x = e,$$

podemos concluir que f não é contínua em $x = 1$ porque $f(1^+) \neq f(1^-)$.

(c) Podemos reescrever a função f do seguinte modo:

$$f(x) = \begin{cases} -xe^x & \text{se } x < 0 \\ xe^x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{x+1} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Pela alínea anterior podemos imediatamente concluir que f não é diferenciável em $x = 1$, uma vez que não é contínua neste ponto.

Temos ainda que estudar a diferenciabilidade no ponto $x = 0$. Assim, calculamos

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x}{x} = 1$$

e

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-xe^x}{x} = -1.$$

Donde concluímos que f não é diferenciável em $x = 0$.

A função derivada só está definida onde f é diferenciável, logo

$$f'(x) = \begin{cases} -(1+x)e^x & \text{se } x < 0 \\ (1+x)e^x & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{-x}}.$$

Podemos fazer a mudança de variável, $y = -x$, obtendo

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0.$$

Nota: Este limite poder-se-ia ter calculado aplicando a Regra de Cauchy.

6. (a) Consideremos o intervalo genérico da forma $[x, x+1]$, com $x \in \mathbb{R}^+$. Como f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ podemos concluir que f é contínua em $[x, x+1]$ e diferenciável em $]x, x+1[$. Assim, pelo Teorema de Lagrange sabemos que existe $c \in]x, x+1[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x}.$$

Ou seja, existe $c \in]x, x+1[$ tal que

$$f'(c) = f(x+1) - f(x).$$

Como $c > x$, se $x \rightarrow +\infty$ então $c \rightarrow +\infty$. É agora fácil de concluir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(c) = \lim_{c \rightarrow +\infty} f'(c) = 0.$$

- (b) Considerando $f(x) = x^a$, sabemos que se trata duma função diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e, calculando a sua derivada obtemos, $f'(x) = ax^{a-1}$. Basta agora calcular o limite de $f'(x)$ quando x tende para $+\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^{a-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^{1-a}} = 0,$$

uma vez que $1 - a > 0$.

Assim, dado que a função considerada está nas condições do resultado enunciado na alínea anterior, podemos imediatamente concluir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^a - x^a = 0.$$