FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I- B, C, D, E

2º Teste

7 de Junho de 2010

Duração: 2h

1. Considere a função real de variável real definida por
$$f(x) = (e^x - 1)^2.$$
   (a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 3, no ponto $a = 0$, da função f.
   (b) Prove que
   $$f(x) > x^2, \qquad \text{para } x > 0.$$
   (c) Obtenha os pontos de inflexão e determine o sentido das concavidades da função f.

(5 valores)

2. Considere a função real de variável real definida por
$$f(x) = \int_1^{x^2} e^{\sqrt{t}} dt - 2x^2.$$
   (a) Calcule $f'(x)$.
   (b) Mostre que f tem um mínimo relativo em $x = \log 2$.

(3 valores)

3. Calcule o valor dos seguintes integrais:
   (a) $\displaystyle\int_0^1 \log(x^2 + 1)dx$;
   (b) $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{2}{e^x - e^{-x}}dx$. (*Sugestão:* Use uma mudança de variável adequada).

(4,5 valores)

4. Calcule a área do domínio plano do 1º quadrante limitado pelas rectas $y = x$, $x = 0$, $y = 2$ e pelo gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(2,5 valores)

(v.s.f.f)

5. Determine a natureza do seguinte integral impróprio:

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sin^2(x)}{x^3+2x-1}dx.$$

(2,5 valores)

6. Mostre que, se f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e a é uma constante real não nula então

$$\int_0^T f(ax)dx = \frac{1}{a}\int_0^{aT} f(x)dx.$$

(2,5 valores)

RESOLUÇÃO
(com notas explicativas)

1. (a) A função f pertence a $C^{\infty}(\mathbb{R})$. Assim, calculamos as derivadas até à terceira ordem:

$$\begin{aligned}
&f(x) = (e^x-1)^2, \qquad f(0)=0\\
&f'(x) = 2(e^x-1)e^x = 2e^{2x}-2e^x, \qquad f'(0)=0\\
&f''(x) = 4e^{2x}-2e^x, \qquad f''(0)=2\\
&f'''(x) = 8e^{2x}-2e^x
\end{aligned}$$

Escrevemos agora a fórmula de Taylor, de ordem 3, no ponto $a=0$, da função f; existe c tal que $0<c<x$ ou $x<c<0$ e

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2}+f'''(c)\frac{x^3}{3!},$$

ou seja existe c tal que $0<c<x$ ou $x<c<0$ e

$$f(x) = x^2+(4e^{2c}-e^c)\frac{x^3}{3}.$$

(b) Queremos provar que $f(x)>x^2$ para $x>0$. De modo equivalente, queremos provar que

$$x^2+(4e^{2c}-e^c)\frac{x^3}{3} > x^2,$$

com $0<c<x$. O que é e equivalente a provar que

$$(4e^{2c}-e^c)\frac{x^3}{3} > 0, \quad 0<c<x.$$

Mas, para $x>0$ também temos que $x^3>0$ e que

$$4e^{2c}-e^c = e^c(4e^c-1) > 0$$

para $c>0$. Donde facilmente concluímos que

$$(4e^{2c}-e^c)\frac{x^3}{3} > 0, \quad 0<c<x,$$

e por conseguinte que $f(x)>x^2$ para $x>0$.

(c) Analisemos os zeros da segunda derivada de f. Assim

$$f''(x) = 4e^{2x} - 2e^x = e^x(4e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow 4e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\log 2.$$

Para obter os pontos de inflexão e o sentido das concavidades analisemos o sinal da segunda derivada de f.

Para $x < -\log 2$ temos que $f''(x) < 0$. Assim, f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\infty, -\log 2[$. Para $x > -\log 2$ temos que $f''(x) > 0$. Assim, f tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]\log 2, +\infty[$. Como a função f muda de sentido da concavidade no ponto $-\log 2$ então o gráfico de f tem um ponto de inflexão em $(-\log 2, f(-\log 2))$.

2. (a) Considerando as funções $F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{\sqrt{t}}dt$ e $g(x) = x^2$ tem-se $f(x) = F(g(x)) - 2x^2$. Vamos primeiro calcular a derivada de $F(g(x))$. Atendendo a que $h(t) = e^{\sqrt{t}}$ é uma função contínua em $[0, +\infty]$, então ela é contínua em qualquer intervalo da forma $[1, a]$, $a > 1$ (ou $[a, 1]$, $0 < a < 1$). Assim, pelo teorema fundamental do cálculo integral, a função $F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{\sqrt{t}}dt$ é diferenciável em $[1, a], a > 1$ (ou $[a, 1]$, $0 < a < 1$) e tem-se, $F'(x) = h(x) = e^{\sqrt{x}}$. Como $F(x)$ é diferenciável em $[0, +\infty[$, $g(x) = x^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e tem contradomínio $[0, +\infty[$, então $F(g(x))$ é diferenciável em $\mathbb{R}$. Como

$$f(x) = F(g(x)) - 2x^2,$$

então

$$f'(x) = (F(x^2))' - (2x^2)'.$$

Como $(F(x^2))' = F'(x^2)(x^2)' = h(x^2)2x = 2xe^{\sqrt{x^2}}$, concluimos que

$$f'(x) = 2xe^{\sqrt{x^2}} - 4x = 2xe^{|x|} - 4x, \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) Note que se $x > 0$, $f'(x) = 2xe^x - 4x$ e $f''(x) = 2(1 + x)e^x - 4$, donde se conclui que f é de classe C^2 em $\mathbb{R}^+$. Podemos concluir que a função f tem um mínimo relativo em $x = \log 2$ se $f'(\log 2) = 0$ e $f''(\log 2) > 0$. De facto, $f'(\log 2) = 0$ e $f''(\log 2) = 4\log 2 > 0$.

3. (a) Este integral deverá ser resolvido por partes. Para tal consideremos $f(x) = 1$ donde uma sua primitiva será $F(x) = x$ e $g(x) = \log(x^2 + 1)$ cuja derivada é $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

Considerando a seguinte expressão para a integração por partes $\displaystyle\int fg = Fg - \int Fg'$ tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log(x^2+1)dx &= \left[x\log(x^2+1)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{x^2+1}dx = \\
&= [1\log(2)-0] - \int_0^1 \frac{2x^2+2-2}{x^2+1}dx = \\
&= \log(2) - \int_0^1 \frac{2(x^2+1)-2}{x^2+1}dx \\
&= \log(2) - \int_0^1 2-\frac{2}{x^2+1}dx = \\
&= \log(2) - 2\left[x-\arctan(x)\right]_0^1 = \\
&= \log(2) - 2\left[1-\arctan(1)-0\right] = \\
&= \log(2) - 2 + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

(b) Faça-se a subtituição $e^x = t \Leftrightarrow x = \log(t)$, donde $dx = \frac{1}{t}dt$.

Procedamos à mudança dos extremos de integração: dados $x = \log(3)$ e $x = \log(2)$ tem-se, respectivamente, $t = 3$ e $t = 2$.

Assim o integral em questão pode escrever-se como

$$\int_2^3 \frac{2}{t-t^{-1}}\frac{1}{t}dt = \int_2^3 \frac{2}{t^2-1}dt.$$

Como o polinómio t^2-1 tem duas raízes reais, então

$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{t^2-1} = \frac{(A+B)t+(A-B)}{t^2-1}.$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Donde,

$$\int_2^3 \frac{2}{t^2-1}dt = \int_2^3 \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}dt = \left[\log|t-1| - \log|t+1|\right]_2^3 =$$

$= \log 2 - \log 4 - \log 1 + \log 3 = \log\frac{3}{2}$.

4. O domínio plano pretendido está representado a sombreado na figura seguinte:

O cálculo da área pretendida envolve o cálculo das áreas das regiões representadas pelas letras A e B.

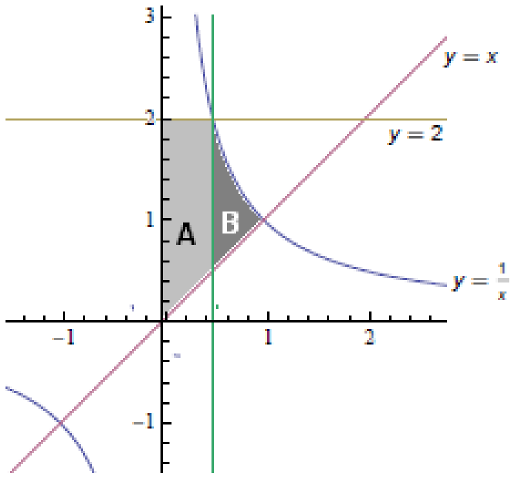
Região A

Nesta região estão envolvidas as funções $y = 2$ e $y = x$ sendo o ponto de intersecção calculado com $y = 2$ e $y = \frac{1}{x}$. Assim temos:

$$\frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

O primeiro ponto de intersecção é, portanto, $P_1 = (\frac{1}{2}, 2)$. Como no intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ a função $y = 2$ é maior do que a função $y = x$, a área da região A, é dada por

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2-x) \quad dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{8}.$$



Região B

Nesta região estão envolvidas as funções $y = \frac{1}{x}$ e $y = x$ sendo o ponto de intersecção calculado com $y = x$ e $y = \frac{1}{x}$. Assim temos:

$$\frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

O segundo ponto de intersecção é, porque estamos no primeiro quadrante, $P_2 = (1,1)$. Como no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ a função $y = \frac{1}{x}$ é maior do que a função $y = x$, a área da região A, é dada por

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{x} - x\right) dx = \left[\log(x) - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \log(1) - \frac{1}{2} - \left(\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} - \log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}.$$

Uma vez que a área pedida é a soma da área da região A com a área da região B temos que a área total é dada por:

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} (2 - x)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{x} - x\right) dx = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \log(2).$$

5. O limite superior do integral é $+\infty$. Será o integral impróprio de primeira espécie ou misto? Para o sabermos, será necessário verificar se o polinómio $p(x) = x^3 + 2x - 1$ se anula no intervalo $[\pi, +\infty]$. Visto que $p'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, a função p é crescente em $\mathbb{R}$. Como $p(\pi) = \pi^3 + 2\pi - 1 > 0$, então $p(x) > 0, \forall x \geq \pi$.

   Neste momento estamos em condições de garantir que o integral em estudo é de primeira espécie.

   Ora, para qualquer $x \geq \pi$,

$$0 \leq \frac{\sqrt{x} + \sin^2(x)}{x^3 + 2x - 1} \leq \frac{\sqrt{x} + 1}{x^3 + 2x - 1} \tag{1}$$

dado que $\sin^2(x) \leq 1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Estudemos então o integral

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x^3+2x-1}dx.$$

Comparemo-lo com

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5}}dx$$

que é um integral de primeira espécie convergente, pois $\alpha = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > 1$.

Ora,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+1}{x^3+2x-1}}{\frac{1}{\sqrt{x^5}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x^5}}{x^3+2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+\sqrt{x^5}}{x^3+2x-1}.$$

Dividindo ambos os termos da fracção por x^3, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\sqrt{x^5}}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cancelto{0}{\frac{\sqrt{x^5}}{x^3}}}{1+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x^3}}} = 1.$$

Dado que o limite é finito e diferente de zero, podemos concluir que os dois integrais são da mesma natureza. Pelo que, o integral

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x^3+2x-1}dx$$

é convergente.

Pela desigualdade (1) podemos então afirmar que o integral

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sin^2(x)}{x^3+2x-1}dx$$

é convergente.

6. Vamos fazer uma substituição no integral, $\displaystyle\int_0^T f(ax)dx$. Consideremos a substituição $x = \dfrac{t}{a}$, a função $\varphi(t) = \dfrac{t}{a}$ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}$, de facto $\varphi'(t) = \dfrac{1}{a}$ e $a \neq 0$. Atendendo a que os limites de integração na variável x são 0 e T, os correspondentes limites de integração na variável t são $0 = \varphi^{-1}(0)$ e $aT = \varphi^{-1}(T)$, respectivamente. Efectuando a substituição no integral tem-se:

$$\int_0^T f(ax)dx = \int_0^{aT} f(t)\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int_0^{aT} f(t)dt.$$

Como

$\displaystyle\frac{1}{a}\int_0^{aT} f(t)dt = \frac{1}{a}\int_0^{aT} f(x)dx$ (mudar a variável de integração não altera o integral)

concluimos que,

$$\int_0^T f(ax)dx = \frac{1}{a}\int_0^{aT} f(x)dx$$