Análise Matemática I C
Repetição do 1º Teste 24/01/2011

Nota: Esta é apenas uma resolução, de entre muitas outras possíveis.

Pergunta 1

(a) A condição $\ln(|x|) < 0$ é equivalente a $0 < |x| < 1$, ou seja $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$. Assim,

$$A =]-1, 0[\cup]0, 1[.$$

Temos $\text{int}(A) = A$ e $\text{fr}(A) = \{-1, 0, 1\}$.

(b) Basta considerar, por exemplo, $B =]-\infty, 1[$.

(c) A afirmação é falsa. Olhando para, por exemplo, os conjuntos considerados nas alíneas anteriores, temos que $A \subset B$ mas $\text{fr}(A)$ não é um subconjunto de $\text{fr}(B)$.

Pergunta 2

(a) A sucessão $\sin(n)$ é limitada entre -1 e 1. Atendendo a que $\frac{1}{n}$ é um infinitésimo, podemos concluir que

$$\lim\left(\frac{1}{n}\sin(n)\right) = 0.$$

Observemos ainda que

$$\lim \sin\left(\frac{1}{n}\right) n = \lim \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1,$$

atendendo a que $\frac{1}{n}$ é um infinitésimo e a que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.
Assim,

$$\lim_{n\to+\infty}\left[2 + \frac{\sin(n)}{n}\right]\left[2 + \sin\left(\frac{1}{n}\right) n\right] = 6.$$

(b) Consideremos

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \frac{1}{\sqrt{2n+4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{3n}}, \forall n \in \mathbb{R}^n.$$

O termo geral desta sucessão resulta da soma de n-3+1=n-2 parcelas. Sendo $\frac{1}{\sqrt{3n}}$ a parcela menor podemos minorar o termo geral da sucessão por:

$$(n-2)\frac{1}{\sqrt{3n}} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{R}^n.$$

Como

$$\lim \frac{n-2}{\sqrt{3n}} = \lim \frac{1-\frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{3}{n}}} = +\infty,$$

podemos concluir que $\lim u_n = +\infty$.

(c) Basta considerar

$$\lim \left(1-\frac{1}{n!}\right)^{(n-1)!} = \lim \left(\left(1-\frac{1}{n!}\right)^{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = (e^{-1})^0 = 1.$$

Pergunta 3

(a) Queremos determinar a ordem dos termos a partir da qual temos

$$\left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < 0.01.$$

Daqui, temos sucessivamente que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2n+4-2n-1}{4n+2}\right| < 0.01 \Leftrightarrow \left|\frac{3}{4n+2}\right| < 0.01 \\
\Leftrightarrow &\frac{3}{4n+2} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 300 < 4n+2 \\
\Leftrightarrow &n > \frac{298}{4} = 74.5.
\end{aligned}$$

Assim, para $n > 74$ temos que os termos da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distam de $\frac{1}{2}$ menos de uma centésima.

(b) Sabemos por definição que $\lim u_n = \frac{1}{2}$ é equivalente

$$\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow \left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \epsilon.$$

Fixemos $\epsilon > 0$. Tal como foi feito na alínea anterior, simplificando a inequação

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \epsilon,$$

obtemos $\frac{3}{4n+2} < \epsilon$. Resolvendo esta inequação em ordem a n resulta que

$$n > \frac{3-2\epsilon}{4\epsilon}.$$

Logo, considerando p como o primeiro natural que satisfaz $p \geq \frac{3-2\epsilon}{4\epsilon}$, para $n > p$ obtemos $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$.

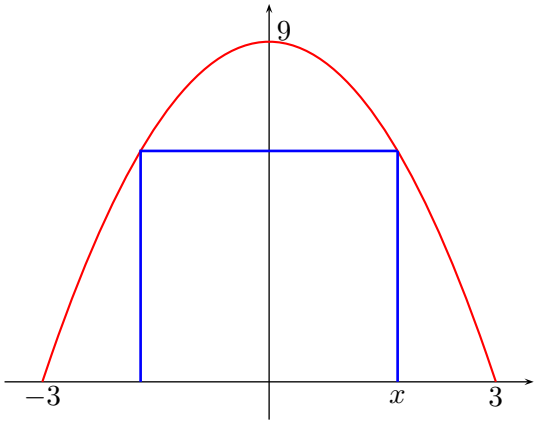

Figure 1: Rectângulo inscrito em parábola.

Pergunta 4

Na Figura 1 encontra-se uma representação gráfica de um rectângulo inscrito na parábola $y = 9 - x^2$, com $y \geq 0$.

Considerando que o vértice do rectângulo no eixo das abcissas tem coordenadas $(x, 0)$, a altura correspondente é $9 - x^2$. Assim, a área do rectângulo é dada pela função

$$A(x) = 2x(9 - x^2).$$

Pretendemos maximizar a função $A(x)$, considerando $0 \leq x \leq 3$.

Comecemos por determinar os correspondentes pontos estacionários:

$$A'(x) = 18 - 6x^2 = 0,$$

o que equivale a $x = \pm\sqrt{3}$. Dado que $0 \leq x \leq 3$, obtemos $x = \sqrt{3}$.

Atendendo a que $A'(x) > 0$ para $0 \leq x < \sqrt{3}$ e a que $A'(x) < 0$ para $\sqrt{3} < x \leq 3$, podemos concluir que $x = \sqrt{3}$ é de facto o ponto de máximo absoluto de A.

Assim, o maior rectângulo inscrito na parábola tem área igual a

$$A(\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^3 = 12\sqrt{3}.$$

Pergunta 5

(a) Consideremos o intervalo fechado $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Como f é contínua neste intervalo (resulta da diferença entre a composta de funções contínuas e uma constante), pelo Teorema de Weierstrass f tem um máximo e um mínimo no mesmo intervalo. Dado que $f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = -1$ e f não é constante então pelo menos um dos extremos é atingido no interior do intervalo ou seja em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(b) Comecemos por determinar os pontos estacionários de f em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, correspondentes aos zeros de f'. Assim,

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\cos(x) - e^{\frac{x}{2}}\sin(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos(x) - \sin(x)\right) = 0,$$

o que equivale a

$$\frac{1}{2}\cos(x) - \sin(x) = 0.$$

Daqui obtemos que $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{2}$, ou seja $\mathrm{tg}(x) = \frac{1}{2}$. Resolvendo em ordem a x obtemos

$$x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

Facilmente se verifica que:

- $f'(x) > 0$ para $-\frac{\pi}{2} < x < \arctan(\frac{1}{2})$
- $f'(x) < 0$ para $\arctan(\frac{1}{2}) < x < \frac{\pi}{2}$

Concluímos assim que f é crescente em $]-\frac{\pi}{2}, \arctan(\frac{1}{2})[$ e decrescente em $]\arctan(\frac{1}{2}), \frac{\pi}{2}[$, pelo que $\arctan(\frac{1}{2})$ é um ponto de máximo relativo da função f.

(c) Notemos que estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Fazendo a mudança de variável $y = x - \frac{\pi}{2}$ obtemos:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{x}{2}}\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to 0} e^{\frac{1}{2}(y+\frac{\pi}{2})}\frac{\cos(y+\frac{\pi}{2})}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} e^{\frac{1}{2}(y+\frac{\pi}{2})}\frac{-\sin(y)}{y} = e^{\frac{\pi}{4}}(-1) = -e^{\frac{\pi}{4}}.$$