FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

Repetição do 1º Teste — 24 de Janeiro de 2011

1. (*3,5 val.*) Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : \ln(|x|) < 0\}$.

   a) Determine o interior e a fronteira de A.

   b) Indique um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ tal que $Fr(A \cup B) = \{1\}$.

   c) Justificando a sua resposta, averigúe a veracidade da seguinte afirmação:

   "Dados P e Q subconjuntos de $\mathbb{R}$, se $P \subset Q$ então $Fr(P) \subset Fr(Q)$."

2. (*5 val.*) Determine o valor dos limites seguintes:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[2 + \frac{\operatorname{sen}(n)}{n}\right]\left[2 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) n\right]$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \frac{1}{\sqrt{2n+4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{3n}}$

   c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n!}\right)^{(n-1)!}$

3. (*3,5 val.*) Considere a sucessão definida por $u_n = \frac{n+2}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   a) Determine a ordem a partir da qual os termos da sucessão $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ distam de $\frac{1}{2}$ menos de uma centésima.

   b) Recorrendo à definição, mostre que a sucessão é convergente.

4. (*3,5 val.*) Determine a área do maior rectângulo inscrito na parábola de equação $y = 9 - x^2$, com $y \geq 0$.
   Nota: Dois dos vértices do rectângulo deverão pertencer à parábola.

5. (*4,5 val.*) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cos x - 1$.

   a) Justifique a existência de um extremo de f no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

   b) Analise a monotonia de f no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e classifique o extremo identificado na alínea anterior.

   c) Calcule:

   $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{x}{2}} \cos x}{x - \frac{\pi}{2}}.$$