Análise Matemática I C - 1º Teste
26/11/2010

Nota: Esta é apenas uma resolução, de entre muitas outras possíveis.

Pergunta 1

a)

$$\lim \frac{n+\sqrt[5]{n^6+n}}{3n\sqrt[5]{n+3}} = \lim \frac{(n+\sqrt[5]{n^6+n})/n^{\frac{6}{5}}}{(3n\sqrt[5]{n+3})/n^{\frac{6}{5}}} =$$
$$= \lim \frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}+\sqrt[5]{1+\frac{1}{n^5}}}{3\sqrt[5]{1+\frac{3}{n}}} = \frac{1}{3}\,.$$

b) A sucessão definida por $u_n = \mathrm{tg}((-1)^n\frac{\pi}{6}), \forall n \in \mathbb{N}$ é limitada pois só assume os valores $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Como

$$\lim \frac{n^2}{3n^2+1} = \lim \frac{1}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3},$$

sabemos que a sucessão definida por

$$v_n = \left(\frac{n^2}{3n^2+1}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

é um infinitésimo. Como produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo temos que

$$\lim \mathrm{tg}\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{n^2}{3n^2+1}\right)^n = 0\,.$$

Pergunta 2

a) Dado que $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, uma definição alternativa para o conjunto A seria:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \neq 0\,, \quad x^2-9<0\}\,.$$

A condição $x^2-9<0$ equivale a $x \in]-3,3[$, donde concluímos que

$$A =]-3,0[\cup]0,3[\,.$$

Temos $Fr(A) = \{-3,0,3\}$ e $Int(A) = A$. O conjunto A é aberto pois coincide com o seu interior. O conjunto A não é fechado pois, por exemplo, o ponto 0 pertence à aderência de A, uma vez que é um ponto fronteiro, mas não pertence a A. Logo A não coincide com a sua aderência.

Pergunta 3

(a) Uma possibilidade seria considerar $B = \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

(b) Mais uma vez, uma possibilidade seria considerar

$$C_1 = \{\pi + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

O conjunto

$$C = B \cup C_1 \cup \mathbb{N}$$

é ilimitado e verifica

$$C' = [0,1] \cup \{\pi\}.$$

Pergunta 4

(a) Para $n = 1$, a condição é uma proposição verdadeira, pois $2 < u_1 = \frac{5}{2} < 3$.

Suponhamos agora que a desigualdade se verifica para u_n e mostremos que tal implica que a desigualdade também seja válida para u_{n+1}. Ou seja consideremos como nossa hipótese $2 < u_n < 3$ e provemos que $2 < u_{n+1} < 3$. Como, por hipótese, $2 < u_n < 3$, temos que

$$\frac{2^2+6}{5} < \frac{u_n^2+6}{5} < \frac{3^2+6}{5} \Leftrightarrow 2 < u_{n+1} < 3$$

como se queria provar.

(b) Pretendemos mostrar que $u_{n+1} - u_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+6}{5} - u_n = \frac{u_n^2 - 5u_n + 6}{5} = \frac{(u_n-2)(u_n-3)}{5}$$

Atendendo a que pela alínea anterior sabemos que $2 < u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $(u_n - 2)(u_n - 3) \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que a sucessão vai ser monótona decrescente.

(c) Pela alínea (a) a sucessão (u_n) é limitada. Pela alínea (b) a sucessão (u_n) é monótona. Como toda a sucessão monótona e limitada é convergente, podemos concluir que (u_n) é convergente.

Qualquer subsucessão de uma sucessão convergente é convergente para o mesmo limite. Sendo (u_{n+1}) uma subsucessão de (u_n), ambas terão limite l, que deverá verificar a relação $l = \frac{l^2+6}{5}$.

Resolvendo esta equação quadrática obtemos as soluções $l = 2$ ou $l = 3$. Atendendo a que (u_n) é uma sucessão decrescente, cujo primeiro termo é $u_1 = \frac{5}{2}$, concluímos que $\lim u_n = l = 2$.

Pergunta 5

(a) A função f tem domínio $\mathbb{R}$ pois $e^x + e^{-x} > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Sendo a composta de funções diferenciáveis, f é diferenciável em $\mathbb{R}$. Calculando a sua derivada obtemos:

$$f'(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}(e^x + e^{-x})' = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^x + e^{-x}}\,.$$

O denominador desta fracção é uma função positiva, tal como e^{-x}. Logo, o sinal da derivada de f é determinado pelo sinal de $e^{2x} - 1$. Temos

$$e^{2x} - 1 < 0 \quad \text{se} \quad x < 0 \qquad \text{e} \qquad e^{2x} - 1 > 0 \quad \text{se} \quad x > 0,$$

pelo que concluímos que f é decrescente em $]-\infty, 0[$ e f é crescente em $]0, +\infty[$.

Atendendo à monotonia de f e ao facto de ser uma função contínua em $x = 0$, podemos concluir que f atinge em $x = 0$ um mínimo absoluto de valor igual a $\ln(2)$.

(b) Tendo em conta que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e consequentemente $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, concluímos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty\,.$$

(c) Considerando os resultados das duas alíneas anteriores e a continuidade de f, podemos concluir que o contradomínio desta função é o intervalo $[\ln(2), +\infty[$.

Pergunta 6

(a) Consideremos a função auxiliar

$$h(x) = e^{-x} - \operatorname{arctg}(x).$$

Esta função é contínua em $\mathbb{R}$, uma vez que resulta da diferença de duas funções contínuas (uma composta de uma exponencial com um polinómio e um arctg). Em particular, h é contínua no intervalo fechado $[0, \sqrt{3}]$. Calculemos $h(0)$ e $h(\sqrt{3})$:

$$h(0) = e^0 - 0 = 1\,, \qquad h(\sqrt{3}) = e^{-\sqrt{3}} - \arctan\sqrt{3} = e^{-\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3} < 1 - \frac{\pi}{3} < 0\,.$$

Atendendo ao Teorema de Bolzano (ou do Valor Intermédio), podemos concluir que h possui pelo menos um zero no intervalo $]0, \sqrt{3}[$, correspondendo a pelo menos uma solução da equação

$$e^{-x} = \arctan(x)\,.$$

(b) Comecemos por calcular a derivada de h:

$$h'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{1 + x^2} < 0\ , \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Assim, h é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$, sendo, em particular, injectiva. Desta forma, a raiz cuja existência se provou em (a) é única.

(c) Pretende-se analisar a equação

$$e^{-x} + k = \arctan(x) \qquad \text{ou, de forma equivalente,} \qquad h(x) = -k\,.$$

Temos

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} h(x) = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Assim, tendo a conta a monotonia e a continuidade de h, concluímos que o seu contradomínio é $]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$. A equação estudada terá solução sse

$$-k \in]-\frac{\pi}{2}, +\infty[\qquad \text{ou equivalentemente} \qquad k \in]-\infty, \frac{\pi}{2}[\,.$$