

Análise Matemática I (B, C, D e E)

1º Teste — 26 de Novembro de 2010

1. (3 val.) Determine o valor dos limites seguintes:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \sqrt[5]{n^6 + n}}{3n\sqrt[5]{n+3}}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} \left((-1)^n \frac{\pi}{6} \right) \left(\frac{n^2}{3n^2 + 1} \right)^n$

2. (2 val.) Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x|}{x^2 - 9} < 0\}$.

- a) Indique o interior e a fronteira de A .
b) O conjunto A é aberto? É fechado? Justifique as suas respostas.

3. (1,5 val.) Dê exemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}$, B e C , tais que:

- a) B tenha interior vazio e derivado $B' = [0, 1]$.
b) C seja ilimitado, com interior vazio e derivado $C' = [0, 1] \cup \{\pi\}$.

4. (4,5 val.) Considere a sucessão definida recursivamente por:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 6}{5}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- a) Utilizando o Princípio de Indução Matemática, mostre que $2 < u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$.
b) Prove que a sucessão $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente.
c) Averigüe se a sucessão $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente e, em caso afirmativo, determine o respectivo limite.

5. (4,5 val.) Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \ln(e^{-x} + e^x).$$

- a) Estude os intervalos de monotonia de f e a existência de extremos relativos.
b) Calcule os limites de f quando x tende para $-\infty$ e $+\infty$.
c) Indique o contradomínio de f .

6. (4,5 val.) Considere a equação $e^{-x} = \operatorname{arctg}(x)$.

- a) Mostre que a equação admite pelo menos uma solução no intervalo $]0, \sqrt{3}[$.
b) Prove que a solução mencionada na alínea anterior é única.
c) Determine os valores reais de k para os quais a equação $e^{-x} + k = \operatorname{arctg}(x)$ tem pelo menos uma solução.