Análise Matemática I C
Repetição do 2º Teste 24/01/2011

Nota: Esta é apenas uma resolução, de entre muitas outras possíveis.

Pergunta 1

(a) Efectuando a divisão dos dois polinómios, obtemos

$$\frac{4x^3+4x^2+5x+1}{4x^2+4x+10} = x + \frac{-5x+1}{4x^2+4x+10} = x - \frac{5}{8}\frac{8x+4}{4x^2+4x+10} + \frac{7}{2}\frac{1}{4x^2+4x+10}\,.$$

Logo

$$\int \frac{4x^3+4x^2+5x+1}{4x^2+4x+10}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{8}\ln(4x^2+4x+10) + \frac{7}{2}\int \frac{1}{4x^2+4x+10}\,dx.$$

Completando o quadrado no denominador, multiplicando e dividindo por 2/3, podemos escrever o último integral indefinido na forma

$$\frac{7}{2}\int \frac{1}{4x^2+4x+10}\,dx = \frac{7}{2}\int \frac{1}{(2x+1)^2+3^2}dx = \frac{7}{12}\int \frac{2/3}{((2x+1)/3)^2+1}dx$$

Assim

$$\frac{7}{2}\int \frac{1}{4x^2+4x+10}\,dx = \frac{7}{12}\arctan(\frac{2x+1}{3}) + C$$

donde

$$\int \frac{4x^3+4x^2+5x+1}{4x^2+4x+10}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{8}\ln(4x^2+4x+10) + \frac{7}{12}\arctan(\frac{2x+1}{3}) + C,$$

com C constante real.

(b) Mudando a variável para $\sqrt{x} = t$, obtemos:

$$\int_1^4 \sin(\sqrt{x})\,dx = \int_1^2 2t\sin(t)\,dt\,.$$

Integrando por partes, vem:

$$\int_1^2 2t\sin(t)\,dt = [2t(-\cos(t))]_1^2 - \int_1^2 2(-\cos(t))\,dt = [2t(-\cos(t))]_1^2 + [2\sin(t)]_1^2\,.$$

Donde,

$$\int_1^4 \sin(\sqrt{x})\,dx = (-4\cos(2) + 2\cos(1)) + (2\sin(2) - 2\sin(1))\,.$$

Pergunta 2

Um polinómio com as propriedades referidas no enunciado deverá coincidir com um polinómio de Taylor com grau menor ou igual a dois. Calculamos

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{4x}e^{\sqrt{x}}\,.$$

Donde $f(4) = e^2$, $f'(4) = \frac{1}{4}e^2$, $f''(4) = -\frac{1}{4}4^{-3/2}e^2 + \frac{1}{16}e^2 = \frac{1}{32}e^2$. O polinómio pretendido é então

$$p(x) = e^2 + \frac{1}{4}e^2(x-4) + \frac{e^2}{2!32}(x-4)^2 = e^2 + \frac{1}{4}e^2(x-4) + \frac{e^2}{64}(x-4)^2\,.$$

Pergunta 3

Um esboço das linhas em causa permite-nos concluir que a área, A, pretendida pode ser calculada efectuando

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x + 1 - x^3 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} - x^3 dx$$

(os pontos de intersecção dos gráficos de $y = 2x+1$ e $y = \frac{1}{x}$ e dos gráficos de $y = \frac{1}{x}$ e $y = x^3$ têm respectivamente abcissas $\frac{1}{2}$ e 1).

Logo

$$A = \left[x^2 + x - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\ln(x) - \frac{x^4}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\,.$$

Pergunta 4

A convergência do integral estudado é equivalente à convergência do integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{t\cos^2(t)}{t^3+1}\,dt.$$

Para $t \geq 1$ temos

$$0 \leq \frac{t\cos^2(t)}{t^3+1} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Posto que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ é convergente, deduzimos pelo critério da comparação a convergência de I.

Pergunta 5

A função $\sqrt{1+x^2}$ é crescente no intervalo $[0,\sqrt{3}]$. Logo,

$$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = 2\,, \qquad \forall x \in [0,\sqrt{3}]\,.$$

Dado que as funções utilizadas na desigualdade anterior são contínuas (e por isso integráveis), podemos escrever:

$$\int_0^{\sqrt{3}} 1\,dx \leq \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx \leq \int_0^{\sqrt{3}} 2\,dx\,,$$

ou

$$\sqrt{3} \leq \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\, dx \leq 2\sqrt{3}\,.$$

Pergunta 6

(a) Para a função integranda estar definida é necessário que

$$2 - e^{-t} \geq 0 \quad \text{ou equivalentemente} \qquad t \geq \log(1/2)\,.$$

Se $t \in [0, x]$ então como $x \geq 0 > \log(1/2)$, F estará bem definida. Se $t \in [x, 0]$, F estará bem definida desde que $x \geq \log(1/2)$. Daqui resulta que o domínio de F corresponde ao intervalo $[\log(1/2), +\infty[$.

(b) Atendendo à continuidade da função integranda, o Teorema Fundamental do Cálculo Integral permite-nos derivar F num ponto $x \in]\log(1/2), +\infty[$, obtendo

$$F'(x) = (x-1)\sqrt{2 - e^{-x}}\,.$$

Dado que $\sqrt{2 - e^{-x}} > 0$ para $x \in]\log(1/2), +\infty[$, o sinal desta derivada é determinado pelo sinal de $(x - 1)$. Assim, F é estritamente decrescente em $]\log(1/2), 1[$ e estritamente crescente em $]1, +\infty[$. Deste modo, podemos afirmar a existência de dois extremos de abcissas $\log(1/2)$ (máximo relativo) e 1 (mínimo relativo).

(c) De facto, podemos afirmar que o mínimo atingido para $x = 1$ é absoluto. Com efeito, o decréscimo estrito de F em $]\log(\frac{1}{2}), 1[$ e o crescimento estrito em $]1, +\infty[$ implicam que

$$x \in [\log(1/2), +\infty[\,\wedge\, x \neq 1 \quad \Rightarrow F(x) > F(1)\,.$$