# Análise Matemática I C - 2º Teste
# 12/01/2011

**Nota: Esta é apenas uma resolução, de entre muitas outras possíveis.**

**Pergunta 1**

a) Da substituição sugerida $t = \sqrt{1+x^2}$, resulta $x = \sqrt{t^2-1}$ e $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$.
Logo,

$$\int \frac{x}{(3+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{t^2-1}}{(2+t^2)t}.\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \int \frac{1}{t^2+2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}}\right)+C$$

com $C$ constante real.

b)
$$G(x) = \int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}\,dx.$$

Verifica-se que
$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$
donde resulta $x+1 = A(x-2)+B(x-1)$.

Uma possibilidade para determinar os valores de $A$ e $B$ seria particularizar esta equação para:

$$\begin{aligned} x=1 &\quad\Rightarrow\quad 2=-A \Leftrightarrow A=-2 \\ x=2 &\quad\Rightarrow\quad 3=B. \end{aligned}$$

Logo,

$$G(x) = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right)dx = 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1| + C,$$

com $C$ constante real.

Sabendo que $G(3)=0$, podemos concluir que $C = 2\ln(2)$. Assim,

$$G(x) = 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1| + 2\ln(2).$$

**Pergunta 2**

a) A função integranda está bem definida desde que $t \neq -1$. Atendendo aos extremos de integração, sabemos que:

$$\begin{array}{lll} t \in [1, e^{x-1}] & \text{se} & x \geq 1 \text{ ou} \\ t \in [e^{x-1}, 1] & \text{se} & x < 1. \end{array}$$

Como $e^{x-1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, podemos concluir que a função $H$ está bem definida para qualquer valor real.

b) A equação da recta tangente ao gráfico de $H$ no ponto $(1, H(1))$ é dada por $y = H'(1)(x-1) + H(1)$.

Consideremos
$$G(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{arctg}(2t^2-1)}{t+1}\, dt.$$
Atendendo à continuidade da função integranda no respectivo domínio, o Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante que

$$G'(x) = \frac{\operatorname{arctg}(2x^2-1)}{x+1}.$$

Sabemos que $H(x) = G(e^{x-1})$, pelo que o Teorema de Derivação da Função Composta garante que

$$H'(x) = \frac{\arctan(2e^{2x-2}-1)}{e^{x-1}+1}\, e^{x-1}.$$

Assim, o declive da recta tangente ao gráfico de $H$ no ponto $x = 1$ é $H'(1) = \frac{\pi}{8}$.

Como
$$H(1) = \int_1^1 \frac{\operatorname{arctg}(2t^2-1)}{t+1}\, dt = 0$$
temos que a equação da recta tangente pretendida será $y = \frac{\pi}{8}(x-1)$.

c) Comecemos por determinar os zeros de

$$H'(x) = \frac{\arctan(2e^{2x-2}-1)}{e^{x-1}+1}\, e^{x-1}.$$

Uma vez que $e^{x-1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, tal equivale a resolver

$$\arctan(2e^{2x-2}-1) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x-2}-1 = 0 \Leftrightarrow 2x-2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = 1 - \frac{\ln(2)}{2}.$$

A determinação do sinal de $H'$ depende apenas do comportamento da função $\arctan(2e^{2x-2}-1)$. À esquerda do ponto $x_0 = 1 - \frac{\ln(2)}{2}$ esta função é negativa, logo a função $H$ é crescente. À direita de $x_0 = 1 - \frac{\ln(2)}{2}$, a função $\arctan(2e^{2x-2}-1)$ é positiva, pelo que $H$ é crescente. Atendendo à continuidade da função $H$, o ponto $x_0 = 1 - \frac{\ln(2)}{2}$ é um ponto de mínimo local da função.

**Pergunta 3**
A área da região será dada por

$$\int_{-\ln(2)}^{0} (2-e^{-x})\,dx+\int_{0}^{-\ln(2)} (2-e^{x})\,dx = 2\int_{0}^{\ln(2)} (2-e^{x})\,dx = [2x-e^{x}]_0^{\ln(2)} = 4\ln(2)-2.$$

**Pergunta 4**

a) $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$.

Logo, $f(1) = 1$, $f'(1) = \frac{1}{2}$, $f''(1) = -\frac{1}{4}$,$f'''(1) = \frac{3}{8}$.

O polinómio de Taylor de grau 3 que aproxima a função $f(x)$ perto do ponto $x = 1$ é:

$$P(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3.$$

b) $\sqrt{110} = 10\sqrt{1.1} \approx 10P(1.1) = 10.488125$.

Para estimar o erro cometido temos de majorar o valor absoluto do resto de Lagrange

$$|R| = \left|\frac{1}{24}f^{(4)}(c)(1.1-1)^4\right| = \left|-\frac{5}{128}c^{-7/2}.(1.1-1)^4\right|,$$

para $c \in ]1, 1.1[$. Atendendo ao intervalo de valores admissíveis para $c$, concluímos que

$$|R| \leq 0.1^4,$$

pelo que o erro cometido na aproximação considerada será inferior a uma milésima.

**Pergunta 5**
Trata-se de uma indeterminação de tipo 0/0.

Consideremos $f(x) = e^{\sin(x)} - 1$ e $g(x) = \sin(2x)$. As funções $f$ e $g$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ pois resultam de compostas de funções diferenciáveis. Por outro lado, $g'(x) = 2\cos(2x) \neq 0$ em qualquer vizinhança de 0 de raio inferior a $\frac{\pi}{4}$. Estão assim reunidas as condições que permitem aplicar a Regra de Cauchy.

Como

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x)}\cos(x)}{2\cos(2x)} = \frac{1}{2},$$

a Regra de Cauchy permite-nos concluir que

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x)}-1}{\sin(2x)} = \frac{1}{2}.$$

**Pergunta 6**

a) Vamos usar o método de primitivação por partes.

$$\int_0^M xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^M - \int_0^M (-e^{-x})\,dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^M = 1-(M+1)e^{-M}\,.$$

b) Recorrendo à alínea anterior,

$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^M xe^{-x}\,dx \; = \lim_{M\to+\infty} (1-(M+1)e^{-M}) = 1.$$

Note-se que

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{M+1}{e^M} = 0,$$

como se verifica facilmente aplicando a Regra de Cauchy.

De facto estamos na presença de uma indeterminação de tipo $\infty/\infty$. Considerando $f(M) = M+1$ e $g(M) = e^M$, temos que $f$ e $g$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e $g'(M) = e^M \neq 0, \forall M \in \mathbb{R}$.

Como $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{e^M} = 0$, a Regra de Cauchy permite-nos concluir que $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \frac{M+1}{e^M} = 0$.