FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

2º Teste — 12 de Janeiro de 2011

1. (*4 val.*)

   a) Utilizando a substituição $t = \sqrt{1+x^2}$, determine a família de primitivas da função
   $$f(x) = \frac{x}{(3+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

   b) Determine a primitiva G da função $g(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$, que verifica $G(3) = 0$.

2. (*4,5 val.*) Considere a função
   $$H(x) = \int_1^{e^{x-1}} \frac{\operatorname{arctg}(2t^2-1)}{t+1}\, dt\,.$$

   a) Justifique que o seu domínio é $\mathbb{R}$.

   b) Indique, justificando, a equação da recta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa $x = 1$.

   c) Determine e classifique os extremos locais da função H.

3. (*2,5 val.*) Calcule a área da região do plano definida pelos gráficos das funções
   $$m(x) = e^x\,, \quad n(x) = e^{-x} \quad \text{e a recta} \quad y = 2\,.$$

4. (*3,5 val.*)

   a) Determine o polinómio de Taylor de grau 3 que aproxima a função $f(x) = \sqrt{x}$, em torno do ponto $x = 1$.

   b) Considerando o resto de Lagrange para a fórmula de Taylor, indique, justificando, uma aproximação de $\sqrt{110}$ com erro inferior a 10^{-3}.
   (Sugestão: Note que $\sqrt{110} = 10\sqrt{1.1}$)

5. (*2,5 val.*) Calcule, caso exista, o valor do seguinte limite:
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)}-1}{\sin(2x)}.$$

6. (*3 val.*)

   a) Mostre que:
   $$\int_0^M xe^{-x}\, dx = 1-(M+1)e^{-M}\,.$$

   b) Recorrendo à alínea anterior, determine, caso exista,
   $$\lim_{M\to+\infty} \int_0^M xe^{-x}\, dx\,.$$