Análise Matemática I C

Resolução da Repetição do 1º teste

30 de Janeiro de 2012

Nota: Esta é apenas uma resolução de entre muitas outras possíveis.

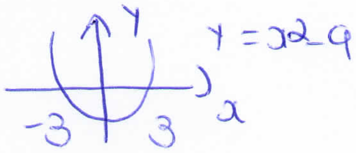
1

a) A função f está bem definida para os pontos que satisfazem

$5-|x^2-4|>0 \wedge e^{x^2}-e\neq 0 \Leftrightarrow |x^2-4|<5 \wedge x^2\neq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5<x^2-4<5 \wedge x\neq \pm 1 \Leftrightarrow -1<x^2<9 \wedge x\neq \pm 1 \Leftrightarrow$

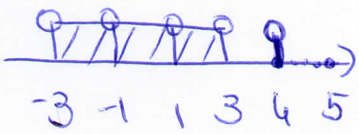
$\Leftrightarrow x^2-9<0 \wedge x\neq \pm 1 \Leftrightarrow x\in]-3,3[\wedge x\neq \pm 1$



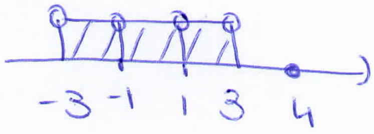
Logo $A =]-3,3[\setminus \{-1,1\}$

b) $\mathrm{int}(A\cup B) =]-3,3[\setminus \{-1,1\}$

$\mathrm{fr}(A\cup B) = \{-3,-1,1,3\} \cup B \cup \{4\}$



ou



$(A\cup B)' = [-3,3] \cup \{4\}$ se (a_n) não é constante, ou

$(A\cup B)' = [-3,3]$ se (a_n) é constante

c) $A\cup B$ é um conjunto limitado pois apresenta pelo menos um minorante (-3) e um majorante (5).

d) A função f é contínua no seu domínio, pois trata-se do quociente de duas funções contínuas. O numerador resulta da composta de duas funções contínuas ($\log x$ e $5-|x^2-4|$). A função $5-|x^2-4|$ é contínua pois é a diferença entre uma constante e a composta de duas funções contínuas ($|x|$ e x^2-4). O denominador de f é uma função contínua pois é a diferença entre uma constante é a composta de duas funções contínuas (e^x e x^2).

Sabendo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem termos no domínio de f e que converge para 2, a continuidade de f garante que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge e para $f(2)$, ou seja, converge para

$$\frac{\log(5)}{e^4 - e}.$$

2 a)

$$\lim \frac{n\sqrt[3]{n^3+6}+1}{2n^2+3} = \lim \frac{\sqrt[3]{1+\frac{6}{n^3}}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

b)

$$\lim \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{n+1} = \lim \left(\frac{3n+3-2}{3n+3}\right)^{n+1} = \lim \left[\left(1-\frac{2}{3n+3}\right)^{3n+3}\right]^{1/3}$$

$$= \left(e^{-2}\right)^{1/3} = e^{-2/3}$$

3

a) Comecemos por mostrar que para $n=1$ a condição resulta numa proposição verdadeira.

$a_1 = \frac{1}{2} < 1 \to$ proposição verdadeira.

Suponhamos que para um dado natural n obtemos uma proposição verdadeira e mostremos que o mesmo acontece para o natural seguinte.

Hipótese: $a_n < 1$

Tese: $a_{n+1} < 1$

Provemos a tese:

$$a_n < 1 \Rightarrow -a_n > -1 \Rightarrow 2 - a_n > 2 - 1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2-a_n} < 1 \Leftrightarrow a_{n+1} < 1$$

Pelo Princípio de Indução Matemática provamos que

$$a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Para analisar a monotonia da sucessão basta analisar o sinal de:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2-a_n} - a_n = \frac{1 - 2a_n + a_n^2}{2 - a_n} = \frac{(a_n - 1)^2}{2 - a_n}$$

Como $a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ temos que $(a_n - 1)^2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $2 - a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim (a_n) é uma sucessão monótona, estritamente crescente.

c) Sendo (a_n) uma sucessão estritamente crescente e majorada (por 1) ela será convergente.

Como (a_{n+1}) é uma subsucessão de uma sucessão convergente (a_n), (a_{n+1}) será convergente e para o mesmo valor. Chamemos-lhe l. Então

$$\lim a_{n+1} = l \quad e \quad \lim a_{n+1} = \lim \frac{1}{2-a_n} = \frac{1}{2-l}.$$

Logo:

$$l = \frac{1}{2-l} \Leftrightarrow 2l - l^2 = 1 \wedge l \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l^2 - 2l + 1 = 0 \wedge l \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (l-1)^2 = 0 \wedge l \neq 2 \Leftrightarrow l = 1.$$

$\therefore \lim a_n = 1.$

4

a) Atendendo a que $|y|$, $\operatorname{arctg} y$ e e^y têm domínio $\mathbb{R}$, podemos concluir que o domínio de f é $\mathbb{R}$.

b) Para $x < 0$, f é contínua pois resulta do produto de duas funções contínuas (um polinómio e a composta de duas funções contínuas, uma exponencial e uma arcotangente).

Para $x > 0$, f é contínua pois é definida pela composição de duas funções contínuas ($|x|$ e um polinómio)

Para $x=0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\leq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\leq 0}} (x-1)e^{\operatorname{arctg} x} = -e^{\operatorname{arctg} 0} = -e^0 = -1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x> 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x> 0}} |x-1| = |-1| = 1$$

Como $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\leq 0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x> 0}} f(x)$, f não é contínua em $x=0$.

Logo f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

e) Como f não é contínua em $x=0$, f não é diferenciável em $x=0$.

Para $x<0$ f é diferenciável porque é definida como o produto de duas funções diferenciáveis (um polinómio e a composta de duas funções diferenciáveis, uma exponencial e um arctangente). Logo:

$$\left((x-1)e^{\operatorname{arctg} x}\right)' = e^{\operatorname{arctg} x} + (x-1)e^{\operatorname{arctg} x}\frac{1}{1+x^2}$$

Para $x>0$:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x\geq 1 \\ -x+1, & \text{se } 0<x<1 \end{cases}$$

Se $x>1$ ou $0<x<1$, a função é diferenciável pois é definida por funções polinomiais. Assim,

$$(|x-1|)' = \begin{cases} 1, & \text{se } x>1 \\ -1, & \text{se } 0<x<1 \end{cases}$$

No ponto $x=1$, $|x-1|$ não é diferenciável pois

$$f'_e(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x+1}{x-1} = -1 \quad , \text{ mas } \quad f'_d(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Em conclusão, f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ e a sua derivada é definida como:

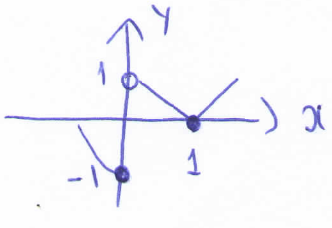
$$f'(x) = \begin{cases} e^{\operatorname{arctg} x}\left(1 + \dfrac{x-1}{1+x^2}\right) & , \text{ se } x<0 \\ 1 & , \text{ se } x>1 \\ -1 & , \text{ se } 0<x<1 \end{cases}$$

$$e^{\operatorname{arctg} x}\left(1 + \frac{x-1}{1+x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{1}+x^2+x-\cancel{1}}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$$

f' tem um único zero em $x=-1$, contudo como não existe derivada quer no ponto $x=0$, quer no ponto $x=1$, estes pontos devem ser analisados localmente, na procura dos extremos locais da função.

Esboçando localmente o gráfico da função obtemos:



		-1		0		1	
f'	$+$		$-$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Assim podemos concluir que:

$x=-1$ é um ponto de máximo local

$x=0$ e $x=1$ são pontos de mínimo locais

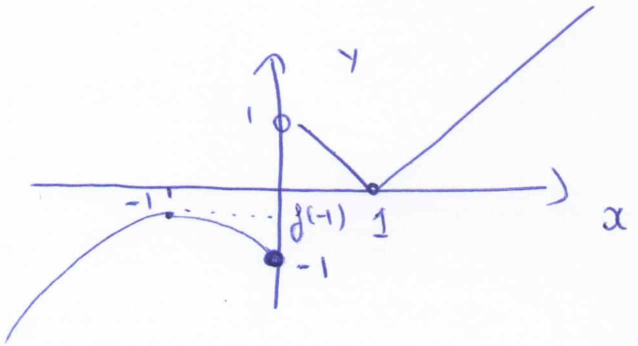
f é crescente em $]-\infty,-1[$ e $]1,+\infty[$

f é decrescente em $]-1,0[$ e $]0,1[$

d)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^{\operatorname{arctg} x} = -\infty \times e^{-\pi/2} = -\infty$$

Utilizando esta informação e a das alíneas anteriores para fazer um esboço do gráfico da função, não tendo em consideração o sentido das concavidades, vem:



$$f(-1) = -2e^{\operatorname{arctg}(-1)} = -2e^{-\frac{\pi}{4}}$$

Assim o contradomínio de f será $]-\infty, -2e^{-\pi/4}] \cup [0,+\infty[$.

5

a) Como f satisfaz as condições do Teorema de Rolle em $[a,b]$, sabemos que f é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. A função g resulta do produto entre e^{-5x}, que é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, pois é a composta de duas funções contínuas, e $f(x)-2$, que é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$.

Assim, g é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Finalmente,

$$g(a) = e^{-5a}(f(a)-2) \underset{\substack{\downarrow \\ f(a)=2}}{=} e^{-5a} \times 0 = 0 = e^{-5b} \times 0 =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ f(b)=2}}{=} e^{-5b}(f(b)-2) = g(b)$$

O Teorema de Rolle é então aplicável a g no intervalo $[a,b]$.

b) Aplicando o Teorema de Rolle a g no intervalo $[a,b]$ concluímos que existe $c \in]a,b[$ tal que $g'(c)=0$.

Determinemos a função derivada de g

$$g'(x) = \left[e^{-5x}(f(x)-2)\right]' = -5e^{-5x}(f(x)-2) + e^{-5x} f'(x)$$

Assim,

$$g'(c)=0 \Leftrightarrow -5e^{-5c}(f(c)-2) + e^{-5c} f'(c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-5c}(-5f(c)+10+f'(c)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5f(c)+10+f'(c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(c) = 5f(c) - 10$$