FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

Repetição do 1º Teste — 30 de Janeiro de 2012

1. Seja A o domínio da função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{\log(5 - |x^2 - 4|)}{e^{x^2} - e}.$$

Considere ainda um conjunto $B \subseteq [4, 5]$, cujos elementos são os termos de uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente para 4.

(a) **[1.0 val.]** Apresentando todos os cálculos, mostre que $A =]-3, 3[\setminus \{-1, 1\}$.

(b) **[1.5 val.]** Determine o interior, a fronteira e o derivado de $A \cup B$.

(c) **[0.5 val.]** Será $A \cup B$ um conjunto limitado? Justifique a sua resposta.

(d) **[0.5 val.]** Considere uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de termos no conjunto A e convergente para 2. Será a sucessão $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente? Em caso afirmativo, indique o valor do limite.

2. Calcule o valor dos limites seguintes:

(a) **[2.0 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt[3]{n^3+6}+1}{2n^2+3}$;

(b) **[2.0 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{n+1}$.

3. Considere a sucessão de **termos positivos**, definida por recorrência,

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) **[1.5 val.]** Recorrendo ao Princípio de Indução Matemática, prove que $a_n < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) **[1.0 val.]** Prove que a sucessão é monótona.

(c) **[1.0 val.]** Justifique que a sucessão é convergente e calcule o seu limite.

4. Considere a função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\, e^{\operatorname{arctg}(x)}, & \text{se } x \leq 0 \\ |x-1|, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) **[0.5 val.]** Determine o domínio da função f.

(b) **[1.5 val.]** Estude f quanto à continuidade.

(c) **[2.5 val.]** Estude f quanto à diferenciabilidade, determine os seus intervalos de monotonia e extremos locais.

(d) **[1.5 val.]** Calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Determine, justificando, o contradomínio de f.

5. Seja f uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e tal que $f(a) = f(b) = 2$.

(a) **[1.0 val.]** Mostre que o Teorema de Rolle é aplicável à função g definida por $g(x) = e^{-5x}(f(x)-2)$.

(b) **[2.0 val.]** Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 5f(c) - 10$.