

Análise Matemática I C - 1º Teste

30/11/2011

Nota: Esta é apenas uma resolução, de entre muitas outras possíveis.

1. Considere o conjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{1 - |x|} > 0 \right\}.$$

(a) [1.5 val.] Apresentando todos os cálculos, mostre que $A =]-\infty, -1[\cup]0, 1[$.

Resposta: Atendendo a que o quociente de dois números é positivo quando ambos apresentam o mesmo sinal temos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1 - |x|} > 0 &\Leftrightarrow (x > 0 \wedge 1 - |x| > 0) \vee (x < 0 \wedge 1 - |x| < 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x > 0 \wedge 1 - x > 0) \vee (x < 0 \wedge 1 + x < 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x > 0 \wedge 1 > x) \vee (x < 0 \wedge x < -1) \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[. \end{aligned}$$

(b) [1.0 val.] Determine a fronteira de A e de $A \cap \mathbb{Q}$.

Resposta: A fronteira de um conjunto é o conjunto constituído pelos seus pontos fronteiros. Um ponto diz-se fronteiro a um conjunto quando qualquer sua vizinhança intersecta o conjunto e o seu complementar. Considerando a densidade dos números racionais nos números reais vem $fr(A) = \{-1, 0, 1\}$ e $fr(A \cap \mathbb{Q}) =]-\infty, -1] \cup [0, 1]$.

(c) [0.5 val.] O conjunto $A \cap \mathbb{Q}$ é fechado? Justifique.

Resposta: O conjunto $A \cap \mathbb{Q}$ não é fechado pois não é igual à sua aderência. Por exemplo, o ponto $x = 0$ é um ponto fronteiro, logo pertence à aderência de $A \cap \mathbb{Q}$, mas não pertence a $A \cap \mathbb{Q}$.

(d) [0.5 val.] Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos no conjunto A . Justifique que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite pelo menos uma subsucessão convergente.

Resposta: Sendo $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos no conjunto A , sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[$. Assim, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma

sucessão limitada. Qualquer sucessão limitada admite pelo menos uma subsucessão convergente, donde o resultado pretendido.

- (e) [0.5 val.] Se adicionalmente às condições da alínea (d), souber que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, o que pode afirmar acerca da convergência de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Justifique.

Resposta: Pela alínea anterior já havíamos concluído que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada. A condição adicional, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ significa que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$, logo $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão monótona crescente. Como toda a sucessão monótona e limitada é convergente, podemos concluir que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

2. Calcule o valor dos limites seguintes:

- (a) [1.5 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$;

Resposta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1}$$

Como a sucessão $\left(\frac{2}{3} \right)^n$ é um infinitésimo podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3.$$

- (b) [2.0 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+5}{\sqrt[3]{4n^6+k}}$;

Resposta: Para $n \in \mathbb{N}$, a soma $\sum_{k=1}^n \frac{n+5}{\sqrt[3]{4n^6+k}}$ pode escrever-se como

$$\sum_{k=1}^n \frac{n+5}{\sqrt[3]{4n^6+k}} = \frac{n+5}{\sqrt[3]{4n^6+1}} + \frac{n+5}{\sqrt[3]{4n^6+2}} + \cdots + \frac{n+5}{\sqrt[3]{4n^6+n}}.$$

Daqui facilmente se conclui que a menor e maior parcelas são $\frac{n+5}{\sqrt[3]{4n^6+n}}$ e $\frac{n+5}{\sqrt[3]{4n^6+1}}$, respectivamente. Atendendo a que na soma em causa existem n parcelas, podemos considerar o seguinte enquadramento para a sucessão:

$$\frac{n^2+5n}{\sqrt[3]{4n^6+n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n+5}{\sqrt[3]{4n^6+k}} \leq \frac{n^2+5n}{\sqrt[3]{4n^6+1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculemos o limite da sucessão minorante e da sucessão majorante. Temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+5n}{\sqrt[3]{4n^6+n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{5}{n}}{\sqrt[3]{4+\frac{1}{n^5}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 5n}{\sqrt[3]{4n^6 + 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{\sqrt[3]{4 + \frac{1}{n^6}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

Pelo Teorema das Sucessões Enquadradas podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+5}{\sqrt[3]{4n^6 + k}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

$$(c) \text{ [1.5 val.]} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\log(n+1)(2 + \cos(n))} - \sqrt{\log(n)(2 + \cos(n))}.$$

Resposta: Atendendo a que $(2 + \cos(n))$ é uma sucessão limitada, com termos no intervalo $[1, 3]$, o cálculo do limite inicial conduz-nos a uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\log(n+1)(2 + \cos(n))} - \sqrt{\log(n)(2 + \cos(n))} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\log(n+1)(2 + \cos(n))} - \sqrt{\log(n)(2 + \cos(n))} \right) \frac{\sqrt{\log(n+1)(2 + \cos(n))} + \sqrt{\log(n)(2 + \cos(n))}}{\sqrt{\log(n+1)(2 + \cos(n))} + \sqrt{\log(n)(2 + \cos(n))}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n+1)(2 + \cos(n)) - \log(n)(2 + \cos(n))}{\sqrt{\log(n+1)(2 + \cos(n))} + \sqrt{\log(n)(2 + \cos(n))}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)(2 + \cos(n))}{\sqrt{\log(n+1)(2 + \cos(n))} + \sqrt{\log(n)(2 + \cos(n))}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)(2 + \cos(n))}{\sqrt{\log(n+1)(2 + \cos(n))} + \sqrt{\log(n)(2 + \cos(n))}}. \end{aligned}$$

Como $\frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\log(n+1)(2 + \cos(n))} + \sqrt{\log(n)(2 + \cos(n))}}$ é um infinitésimo e $(2 + \cos(n))$ é uma sucessão limitada, podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\log(n+1)(2 + \cos(n))} - \sqrt{\log(n)(2 + \cos(n))} = 0.$$

3. [2.5 val.] Utilizando o Princípio de Indução Matemática, mostre que a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Resposta: Começemos por mostrar que a afirmação é válida para o primeiro dos números naturais. De facto,

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1},$$

é uma proposição verdadeira.

Suponhamos agora que a afirmação é válida para um certo natural $n \in \mathbb{N}$ (hipótese de indução):

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Mostremos que tal implica que também seja válida para o natural seguinte, $n+1$ (tese de indução):

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{por hipótese de indução}) \\ &= \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Pelo princípio de indução matemática, fica assim demonstrada a veracidade da condição considerada.

4. Considere a função f real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2}, & \text{se } x < 0 \\ x^2 e^{-2x}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) [1.5 val.] Determine o domínio da função f e estude a sua continuidade.

Resposta: O domínio da função f é $\mathbb{R}$, pois em $\mathbb{R}^-$ a função $1+x^2$ não se anula. Tal implica que a função $\frac{x^2}{1+x^2}$ é contínua por ser o quociente de duas funções polinomiais. Logo f é contínua para $x < 0$. Se $x > 0$, a função é contínua por ser o produto de uma função polinomial pela composição de uma exponencial com uma função polinomial. Para analisar a continuidade no ponto $x = 0$ calculemos os limites laterais para a função neste ponto.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{1+x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{-2x} = 0 \end{aligned}$$

Dado que estes limites são iguais e iguais a $f(0)$, f é contínua em $x = 0$. Assim, podemos concluir que f é contínua em $\mathbb{R}$.

- (b) [2.5 val.] Estude f quanto à diferenciabilidade, determine os seus intervalos de monotonia e extremos locais.

Resposta: Para $x < 0$, a função f é diferenciável pois é definida como o quociente de duas funções polinomiais, logo diferenciáveis. Para $x > 0$, a função é diferenciável por ser definida como o produto de uma função polinomial pela composta de uma função exponencial com uma função polinomial, todas funções diferenciáveis. A derivada de f em $x \neq 0$ é dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x(1+x^2) - 2x^3}{(1+x^2)^2}, & \text{se } x < 0 \\ 2x e^{-2x} - 2x^2 e^{-2x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2x}{(1+x^2)^2}, & \text{se } x < 0 \\ 2x(1-x) e^{-2x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

No ponto $x = 0$ temos

$$f'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 e^{-2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-2x} = 0,$$

portanto, $f'(0) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \wedge x < 0) \vee (x(1-x) = 0 \wedge x > 0) \Leftrightarrow x = 1.$$

Estudemos o sinal da primeira derivada para determinarmos a monotonia da função e eventuais extremos locais.

		0		1	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$

A função é decrescente nos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]1, +\infty[$ e é crescente no intervalo $]0, 1[$. Atendendo a que a função é contínua em $\mathbb{R}$ e aos intervalos de monotonia considerados, podemos concluir que existe um mínimo local em $x = 0$ e um máximo local em $x = 1$.

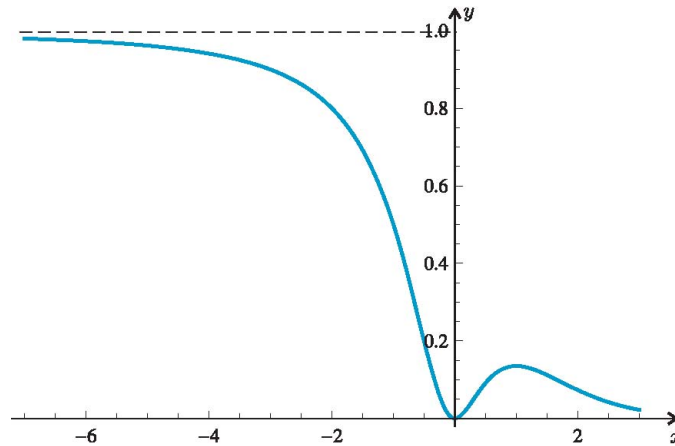
- (c) [1.5 val.] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Determine, justificando, o contradomínio de f .

Resposta: Calculemos o limite pretendido:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} = 1.$$

Atendendo às expressões que definem a função podemos concluir que esta é não negativa em $\mathbb{R}$. Como $f(0) = 0$ e $f(1) = e^{-2}$, a continuidade de f e o Teorema de Bolzano permitem-nos garantir que o contradomínio de f será o intervalo $[0, 1[$.

Embora não solicitado, apresenta-se um possível esboço para o gráfico de f na figura seguinte.



5. Considere duas funções f e g , pares e contínuas em $\mathbb{R}$, tais que $f(0) < g(0)$ e $f(4) > g(4)$.
- (a) [1.0 val.] Mostre que os gráficos de f e g se intersectam em, pelo menos, dois pontos distintos.

Resposta: Considere-se a função $h(x) = f(x) - g(x)$. Garantir a existência de intersecções para os gráficos de f e g equivale a garantir a existência de zeros para h .

Sendo f e g funções contínuas em $\mathbb{R}$ e h definida como a sua diferença, h será igualmente contínua em $\mathbb{R}$. Sabemos ainda que $h(0) = f(0) - g(0) < 0$ e $h(4) = f(4) - g(4) > 0$, pelo que podemos afirmar que $h(0).h(4) < 0$.

O Teorema de Bolzano garante então que existe pelo menos um ponto $c \in]0, 4[$ tal que $h(c) = 0$, o que significa que $f(c) = g(c)$. Atendendo à paridade de f e g podemos concluir que $f(-c) = f(c) = g(c) = g(-c)$. Logo f e g intersectam-se pelo menos em dois pontos distintos, respectivamente c e $-c$.

- (b) [2.0 val.] Sabendo adicionalmente que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= k > 1\end{aligned}$$

prove que os gráficos de f e g se intersectam em pelo menos, mais dois pontos distintos, além dos referidos na alínea (a).

Resposta: Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ então existe $\alpha > 0$ tal que para $x > \alpha$, $f(x) < 0$. O mesmo se aplica a $g(x)$, pelo que se pode concluir da existência de $\beta > 0$ tal que para $x > \beta$, $g(x) < 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 1$ sabemos que:

$$\forall \delta > 0, \exists \gamma > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > \gamma \Rightarrow k - \delta < \frac{f(x)}{g(x)} < k + \delta.$$

Fixemos $\delta = k - 1 > 0$. Podemos concluir que existe $\gamma > 0$ tal que para $x > \gamma$, $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$. Para $x > \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$ vem $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$ e $g(x) < 0$, pelo que $f(x) < g(x)$. Consideremos $x_0 > 4$ tal que $f(x_0) < g(x_0)$.

Considerando novamente a função diferença $h(x) = f(x) - g(x)$, h é uma função contínua em $\mathbb{R}$, $h(4) = f(4) - g(4) > 0$ e $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) < 0$. Novamente, o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um ponto $d \in]4, x_0[$, logo distinto de qualquer um dos pontos cuja existência foi determinada na alínea anterior, tal que $h(d) = 0$. Tal equivale a garantir a existência de pelo menos uma intersecção para os gráficos de f e g . A paridade das funções f e g garante uma nova intersecção em $] -x_0, -4[$.