

Análise Matemática I (B, C, D e E)

1º Teste — 30 de Novembro de 2011

1. Considere o conjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{1 - |x|} > 0 \right\}.$$

- (a) [1.5 val.] Apresentando todos os cálculos, mostre que $A =] - \infty, -1[\cup]0, 1[$.
- (b) [1.0 val.] Determine a fronteira de A e de $A \cap \mathbb{Q}$.
- (c) [0.5 val.] O conjunto $A \cap \mathbb{Q}$ é fechado? Justifique.
- (d) [0.5 val.] Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos no conjunto A . Justifique que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite pelo menos uma subsucessão convergente.
- (e) [0.5 val.] Se, adicionalmente às condições da alínea (d), souber que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, o que pode afirmar acerca da convergência de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Justifique.

2. Calcule o valor dos limites seguintes:

- (a) [1.5 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n};$
- (b) [2.0 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+5}{\sqrt[3]{4n^6 + k}};$
- (c) [1.5 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\log(n+1)(2 + \cos(n))} - \sqrt{\log(n)(2 + \cos(n))}.$

3. [2.5 val.] Utilizando o Princípio de Indução Matemática, mostre que a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. Considere a função f real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2}, & \text{se } x < 0 \\ x^2 e^{-2x}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) [1.5 val.] Determine o domínio da função f e estude a sua continuidade.
 - (b) [2.5 val.] Estude f quanto à diferenciabilidade, determine os seus intervalos de monotonia e extremos locais.
 - (c) [1.5 val.] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Determine, justificando, o contradomínio de f .
5. Considere duas funções f e g , pares e contínuas em $\mathbb{R}$, tais que $f(0) < g(0)$ e $f(4) > g(4)$.
- (a) [1.0 val.] Mostre que os gráficos de f e g se intersectam em, pelo menos, dois pontos distintos.
 - (b) [2.0 val.] Sabendo adicionalmente que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= k > 1 \end{aligned}$$

prove que os gráficos de f e g se intersectam em pelo menos, mais dois pontos distintos, além dos referidos na alínea (a).