Análise Matemática I C

Resolução da Repetição do 2º Teste

30 de Janeiro de 2012

Nota: Esta é apenas uma resolução, de entre muitas outras possíveis.

1. O cálculo do limite

$\lim_{x\to 0}(1+tg\,x)^{\frac{1}{sen\,x}}$ conduz-nos a uma indeterminação do tipo 1^{∞}. Comecemos por transformar a expressão analítica que define a função, com o objectivo de aplicar a Regra de Cauchy.

$$\lim_{x\to 0}(1+tg\,x)^{\frac{1}{sen\,x}} = \lim_{x\to 0} e^{\log\left((1+tg\,x)^{\frac{1}{sen\,x}}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+tg\,x)}{sen\,x}}$$

porque a função exponencial é uma função contínua.

Determinemos então $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+tg\,x)}{sen\,x}$ que está associado a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

$\log(1+tg\,x)$ e $sen\,x$ são funções diferenciáveis em $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$

$(sen\,x)' = \cos x \neq 0,\ \forall x \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\log(1+tg\,x)\right)'}{(\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1+tg\,x}}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^3 x\,(1+tg\,x)} = 1$$

Pela Regra de Cauchy, como o limite anterior existe, então $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+tg\,x)}{\operatorname{sen} x}$ existe e toma o mesmo valor.

Logo,

$$\lim_{x\to 0} (1+tg\,x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = e^1 = e$$

(2)

a) A função $f(x) = \operatorname{sen} x (\cos x)^2$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ logo é possível escrever para f uma fórmula de Taylor de qualquer ordem, em torno de qualquer ponto. A fórmula de MacLaurin, com resto de Lagrange de ordem 3, apresenta a seguinte expressão:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f'''(c)\text{, com } c \text{ entre}$$

0 e x.

$f'(x) = (\cos x)^3 - 2(\operatorname{sen} x)^2 \cos x$ e $f'(0) = 1$

$$f''(x) = -3\operatorname{sen} x(\cos x)^2 - 4\operatorname{sen} x(\cos x)^2 + 2(\operatorname{sen} x)^3 =$$
$$= -7\operatorname{sen} x(\cos x)^2 + 2(\operatorname{sen} x)^3$$ e $f''(0) = 0$

$$f'''(x) = -7(\cos x)^3 + 14(\operatorname{sen} x)^2\cos x + 6(\operatorname{sen} x)^2 \cos x$$
$$= -7(\cos x)^3 + 20(\operatorname{sen} x)^2 \cos x$$

Assim,

$$\operatorname{sen} x(\cos x)^2 = x + \frac{x^3}{6}\left(-7(\cos c)^3 + 20(\operatorname{sen} c)^2 \cos c\right),$$ com c entre 0 e x

b) Recorrendo à alínea anterior, temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos x)^2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{x^3}{6}\left(-7(\cos c)^3 + 20(\operatorname{sen} c)^2\cos c\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 + \frac{x^2}{6}\left(-7(\cos c)^3 + 20(\operatorname{sen} c)^2 \cos c\right)$$

Quando x tende para 0, dado que c está entre 0 e x, c também tende para 0. Atendendo à continuidade de f''' temos que o limite pretendido será igual a 1.

③

a) Começamos por determinar uma primitiva de $\frac{1}{(x^2+2)(x-1)}$.

$$\frac{1}{(x^2+2)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{A(x^2+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2)}$$

Daqui se conclui que

$$1 = A(x^2+2)+(Bx+C)(x-1)$$

Quando $x=1$ temos $1 = 3A \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}$.

Se $x=0$ vem $1 = \frac{2}{3} - C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{3}$

Para $x=-1$ vem

$$\cancel{1} = \cancel{1} + \left(-B - \frac{1}{3}\right)(-2) \Leftrightarrow 2B + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{1}{3}$$

Assim

$$\int \frac{1}{(x^2+2)(x-1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+2}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1/2}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log(x^2+2) - \frac{1}{3\sqrt{2}}\int \frac{1/\sqrt{2}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log(x^2+2) - \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C,$$

com C uma constante real.

Recorrendo à Regra de Barrow temos:

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{(x^2+2)(x-1)}\,dx = \left[\frac{1}{3}\log(x-1) - \frac{1}{6}\log(x^2+2) - \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{2} =$$

$$= -\frac{1}{6}\log 6 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\log(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{6}\log 4 + \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg} 1 =$$

$$= -\frac{1}{6}\log 6 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\log(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{6}\log 4 + \frac{1}{3\sqrt{2}}\frac{\pi}{4}$$

b) Recorrendo a integração por partes vem:

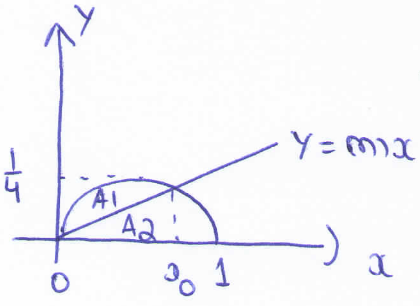
$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} x \arcsin(x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\arcsin(x^2)\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} - \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} x^3(1-x^4)^{-1/2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{\pi}{6} + \left[\frac{1}{2}(1-x^4)^{1/2}\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} =$$

$$= -\frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{1/2} = -\frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(4) Comecemos por esboçar um gráfico que represente a situação em análise:



$$y = x - x^2 = x(1-x)$$

Pretendemos que o valor da área A_1 seja igual ao de A_2, ou seja, que o valor de A_1 seja metade do valor da área compreendida entre o gráfico da parábola e o eixo dos xx. Determinemos o valor desta última área:

$$\int_0^1 x - x^2 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Assim,

$$A_1 = \int_0^{x_0} x - x^2 - mx \, dx = \frac{1}{12}$$

Comecemos por calcular x_0:

$$x - x^2 = mx \Leftrightarrow (1-m)x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-m-x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1-m$$

$$\int_0^{1-m} x - x^2 - mx \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - m\frac{x^2}{2} \right]_0^{1-m} =$$

$$= \frac{(1-m)^2}{2} - \frac{(1-m)^3}{3} - m\frac{(1-m)^2}{2} =$$

$$= \frac{(1-m)^2}{2}(1-m) - \frac{(1-m)^3}{3} = (1-m)^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= (1-m)^3 \, \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$ (7)

Donde

$$(1-m)^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow m = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$, pelo que

a recta pretendida tem a equação $y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) x$.

(5)

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{(t+1)\sqrt{t}}\, dt$ é um integral impróprio de 1ª espécie

visto que o domínio de integração é um intervalo ilimitado, mas a função integranda é contínua no intervalo de integração considerado (o domínio da função integranda em $\mathbb{R}^+$ e $[1, +\infty[\subset \mathbb{R}^+$).

$$0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2 t}{(t+1)\sqrt{t}} \leq \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}} = \frac{1}{t\sqrt{t}+\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t\sqrt{t}}, \quad \forall t \in [1, +\infty[$$

Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\, dt$ é convergente, por

um dos critérios de comparação, podemos concluir que

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{(t+1)\sqrt{t}}\, dt$ é convergente e, sendo a

função integranda não negativa no intervalo de integração considerado, esta convergência é absoluta.