Análise Matemática I C

2º teste - 20 de Janeiro de 2012

Nota: Esta é apenas uma resolução de entre muitas outras possíveis.

Pergunta 1

$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos x)}{\text{sen}(x^2)}$ conduz-nos a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

$\log(\cos x)$ e $\text{sen}(x^2)$ são funções diferenciáveis em $\left]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[$ pois resultam da composição de funções diferenciáveis e estão bem definidas no intervalo considerado

$[\text{sen}(x^2)]' = \cos(x^2)\, 2x \neq 0, \forall x \in \left]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[\setminus \{0\}$

Logo estão satisfeitas as condições necessárias à aplicação da Regra de Cauchy.

$$\lim_{x \to 0} \frac{[\log(\cos x)]'}{[\text{sen}(x^2)]'} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}}{\cos(x^2)\, 2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} -\frac{\text{sen}\, x}{x} \frac{1}{2\cos(x^2)\cos x}$$

Atendendo a que $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$, podemos concluir que $\lim_{x \to 0} -\frac{\text{sen}\, x}{x} \frac{1}{2\cos(x^2)\cos x} = -\frac{1}{2}$. A Regra de Cauchy garante então que $\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos x)}{\text{sen}(x^2)} = -\frac{1}{2}$.

Pergunta 2

a) A função $f(x) = e^x(\operatorname{sen} x + 1)$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ pelo que em particular é de classe $C^{(4)}$ numa vizinhança do ponto $x = 0$.

A fórmula de MacLaurin, com resto de ordem 4, para a função f é dada por:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f'''(0) + \frac{x^4}{24} f^{IV}(c), \text{ com}$$

c entre 0 e x.

Determinemos então as quatro primeiras derivadas da função f:

$$f'(x) = e^x(\operatorname{sen} x + 1) + e^x \cos x = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x + 1) \quad \text{e} \quad f'(0) = 2$$

$$f''(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x + 1) + e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) =$$

$$= e^x(\cancel{\operatorname{sen} x} + \cos x + 1 + \cos x - \cancel{\operatorname{sen} x}) =$$

$$= e^x(2\cos x + 1) \qquad \text{e} \quad f''(0) = 3$$

$$f'''(x) = e^x(2\cos x + 1) + e^x(-2\operatorname{sen} x) =$$

$$= e^x(2\cos x - 2\operatorname{sen} x + 1) \qquad \text{e} \quad f'''(0) = 3$$

$$f^{IV}(x) = e^x(2\cos x - 2\operatorname{sen} x + 1) + e^x(-2\operatorname{sen} x - 2\cos x)$$

$$= e^x(2\cancel{\cos x} - 2\operatorname{sen} x + 1 - 2\operatorname{sen} x - 2\cancel{\cos x})$$

$$= e^x(-4\operatorname{sen} x + 1)$$

Assim, substituindo os valores na fórmula indicada, vem:

$$e^x(\operatorname{sen} x + 1) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{6}x^3 + \frac{x^4}{24} e^c(-4\operatorname{sen} c + 1), \text{ com } c$$

entre 0 e x

Finalmente

$$e^x(\operatorname{sen} x+1)=1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{x^4}{24}e^c(-4\operatorname{sen} c+1),$$

com c entre 0 e x.

b) Atendendo à alínea anterior,

$$e^x(\operatorname{sen} x+1)\geq 1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{x^4}{24}e^c(-4\operatorname{sen} c+1)\geq 1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{24}e^c(-4\operatorname{sen} c+1)\geq 0 \Leftrightarrow -4\operatorname{sen} c+1\geq 0$$

Como $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq 0$ e c encontra-se entre 0 e x, então c será um ângulo do quarto quadrante pelo que

$$\operatorname{sen} c\leq 0 \Rightarrow -4\operatorname{sen} c\geq 0 \Rightarrow -4\operatorname{sen} c+1\geq 0$$

Pergunta 3

Consideremos a substituição $e^x = t \Leftrightarrow x = \log t$.

$$\int \frac{e^x+2}{e^{2x}+e^x}\,dx = \int \frac{t+2}{t^2+t}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t+2}{t^2(t+1)}\,dt$$

Atendendo à decomposição das funções racionais temos

$$\frac{t+2}{t^2(t+1)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t+1}$$

Começamos por determinar os valores das constantes A, B e C:

$$\frac{t+2}{t^2(t+1)} = \frac{A(t+1)+Bt(t+1)+Ct^2}{t^2(t+1)}$$

Para que as fracções sejam iguais, atendendo a que os denominadores já são iguais basta que:

$$t+2 = A(t+1)+Bt(t+1)+Ct^2$$

Em particular, quando $t=0$ temos

$$2 = A$$

Para $t=-1$, obtemos

$$1 = C$$

Se $t=1$, vem

$$3 = 4+2B+1 \Leftrightarrow -2 = 2B \Leftrightarrow B = -1$$

Assim,

$$\int \frac{t+2}{t^2(t+1)}\,dt = \int \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\,dt =$$

$$= -\frac{2}{t} - \log|t| + \log|t+1| + c =$$

$$= -\frac{2}{e^x} - \log(e^x) + \log(e^x+1) + c =$$

$$= -\frac{2}{e^x} - x + \log(e^x+1) + c$$, com c uma constante real

Substituindo nesta família de primitivas x pelo valor 0, sabemos que teremos de obter $\log(2)$. Assim:

$$-\frac{2}{e^0} - 0 + \log(e^0+1) + c = \log 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 + \log 2 + c = \log 2 \Leftrightarrow c = 2$$

A primitiva pretendida é então a função

$$-\frac{2}{e^x} - x + \log(e^x+1) + 2$$

b) Recorrendo ao método de integração por partes vem:

$$\int_{\sqrt{2}}^{e} x \log(x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\log(x^2-1)\right]_{\sqrt{2}}^{e} - \int_{\sqrt{2}}^{e} \frac{x^2}{\cancel{2}}\,\frac{1}{x^2-1}\,\cancel{2}x\,dx$$

$$= \frac{e^2}{2}\log(e^2-1) - \int_{\sqrt{2}}^{e} \frac{x^3}{x^2-1}\,dx =$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-1 \\ \hline -x^3+x & x \\ x & \end{array}$$

$$= \frac{e^2}{2}\log(e^2-1) - \int_{\sqrt{2}}^{e} x + \frac{x}{x^2-1}\,dx =$$

$$= \frac{e^2}{2}\log(e^2-1) - \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2-1)\right]_{\sqrt{2}}^{e}$$

$$= \frac{e^2}{2}\log(e^2-1) - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\log(e^2-1) + 1 =$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\log(e^2-1) - \frac{e^2}{2} + 1$$

<u>Pergunta 4</u>

a) Para que a função F esteja bem definida $t+1 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq -1$

$t \in [0,x]$ se $x \geq 0$ ou $t \in [x,0]$ se $x < 0$

No primeiro caso a condição $t \neq -1$ será sempre satisfeita.

No segundo caso, para que esta condição seja satisfeita, $x > -1$.

Assim o domínio da função F será o intervalo

$$]-1,+\infty[\,.$$

b)

A função $\frac{e^t}{t+1}$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ pois é o quociente de duas funções contínuas.

No domínio $D_F =]-1,+\infty[$ a variável $t \neq -1$ pelo que $\frac{e^t}{t+1}$ é uma função contínua. O Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante que F é diferenciável em $D_F =]-1,+\infty[$ e $\forall x \in]-1,+\infty[,\ F'(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

e) Se a função F tiver pontos de inflexão então a segunda derivada de F será nula nesses pontos.

$$F''(x) = \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{(x+1)e^x - e^x}{(x+1)^2} = \frac{x e^x}{(x+1)^2}$$ que apresenta um único zero em $x=0$, sendo o seu sinal determinado pelo sinal de x, já que $\frac{e^x}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Assim:

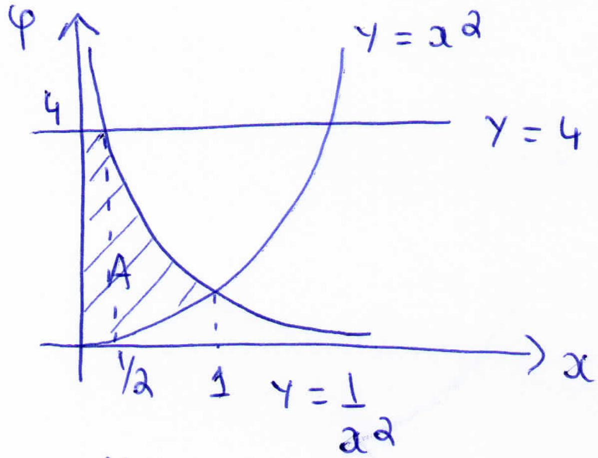
- Em $]-\infty,0[$, $F''(x)<0$ o que significa que F tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0[$

- Em $]0,+\infty[$, $F''(x)>0$ o que significa que F tem a concavidade voltada para cima em $]0,+\infty[$.

- Como em $x=0$ a concavidade de F muda de sentido, F tem um ponto de inflexão em $x=0$.

Pergunta 5

a) Comecemos por esboçar um gráfico associado ao cálculo da área pretendida:



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases} \qquad x^2 = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\begin{cases} y = 4 \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases} \qquad \frac{1}{x^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

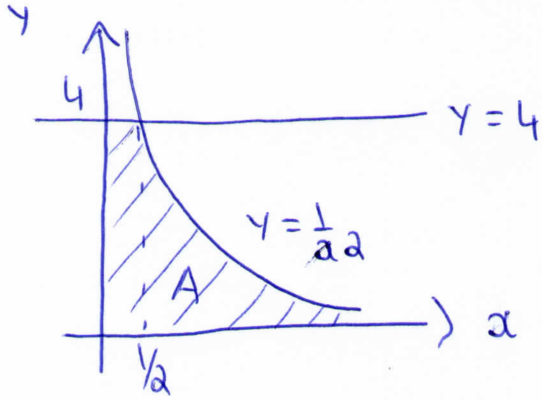
$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$A = \int_0^{1/2} 4 - x^2 \, dx + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{x^2} - x^2 \, dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{1/2} + \left[-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} \right]_{1/2}^{1} =$$

$$= 2 - \cancel{\frac{1}{24}} + \left(-1 - \frac{1}{3} + 2 + \cancel{\frac{1}{24}} \right) = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

b) Representemos graficamente o domínio em análise:



Trata-se de um domínio ilimitado, pelo que associado ao cálculo do valor desta área estará um integral impróprio.

Assim

$$A = \int_0^{1/2} 4 \, dx + \int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx =$$

$$= 2 + \lim_{x \to +\infty} \int_{1/2}^{x} \frac{1}{t^2} \, dt =$$

$$= 2 + \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{1}{t} \right]_{1/2}^{x} =$$

$$= 2 + \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} + 2 \right) = 4$$