FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

# Análise Matemática I (B, C, D e E)

## 1º Teste — 24 de Outubro de 2012

1. Considere os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} < 0 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(a) **[1.5 val.]** Apresentando todos os cálculos, mostre que $A = ]-\infty, 1[ \cup ]2, 3[$.

(b) **[1.0 val.]** Determine a fronteira de $A \cup B$.

(c) **[1.5 val.]** Indique, justificando, se $B \cup \{2\}$ é aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.

(d) **[1.5 val.]** Seja $X \subset \mathbb{R}$. Das seguintes afirmações indique as que são verdadeiras e as que são falsas. Para as afirmações que considerar falsas construa e apresente um exemplo para corroborar a sua classificação.

i) Se $x$ é ponto interior de $X$ então $x$ é ponto de acumulação de $X$;

ii) Se $x$ é ponto isolado de $X$ então $x$ é ponto fronteiro de $X$;

iii) A intersecção do conjunto $X'$ com $\mathrm{fr}(X)$ é um conjunto vazio.

2. Calcule o valor dos limites seguintes:

(a) **[2.5 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4n-3}{4n+1}\right)^n$;

(b) **[3.0 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)\cos^2(2n+1)$;

(c) **[3.5 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

3. Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) **[3.0 val.]** Utilizando o Princípio de Indução Matemática, mostre que

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) **[2.5 val.]** Recorrendo à alínea anterior, calcule o valor do seguinte limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{u_n}{n!}}.$$