Análise Matemática - I (C)
Resolução da Repetição do 1º Teste - 27 Janeiro 2010

1. (a) $int(A \cup B) = \emptyset$
   $(A \cup B)' = [-\sqrt{3}, -1] \cup \{0\}$

   (b) $\overline{B} = B \cup fr(B) = B \cup \{0\} \neq B$, logo B não é um conjunto fechado.

   (c) Para escrever o conjunto C na forma de intervalo ou união de intervalos há que resolver a desigualdade $\arccos(\frac{x}{2} - 1) < \frac{\pi}{2}$.
   $\arccos(\frac{x}{2} - 1) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{2} - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 2 < x \leq 4$.
   Como $x \in \mathbb{N}$, $C = \{3, 4\}$.
   $A \cup B \cup C = ([-\sqrt{3}, -1] \cap \mathbb{Q}) \cup \{e^{-n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{3, 4\}$.
   O conjunto dos majorantes de $A \cup B \cup C$ é $[4, +\infty[$. O conjunto dos minorantes de $A \cup B \cup C$ é $]-\infty, -\sqrt{3}]$. O $max(A \cup B \cup C) = 4$ porque é um majorante que pertence ao conjunto. $sup(A \cup B \cup C) = 4$ porque é o elemento mínimo do conjunto dos majorantes. Não existe mínimo porque nenhum minorante pertence ao conjunto. $inf(A \cup B \cup C) = -\sqrt{3}$ porque é o elemento máximo do conjunto dos minorantes.

2. (a) $\lim b_n = \lim \dfrac{2^n + 3^{n+1}}{e^{n-1} - \pi^n} = \lim \dfrac{\frac{2^n}{\pi^n} + \frac{3^{n+1}}{\pi^n}}{\frac{e^{n-1}}{\pi^n} - \frac{\pi^n}{\pi^n}} = \lim \dfrac{(\frac{2}{\pi})^n + 3(\frac{3}{\pi})^n}{\frac{1}{e}(\frac{e}{\pi})^n - 1} = \dfrac{0 + 3 \times 0}{\frac{1}{e} \times 0 - 1} = 0$

   (b) $\lim c_n = \lim \dfrac{sen(n)}{n^2+3} \log \left[\left(\dfrac{3n+1}{3n+4} \right)^{n^2} \right] = \lim sen(n) \dfrac{n^2}{n^2+3} \log \left(\dfrac{3n+1}{3n+4} \right) =$
   $\lim sen(n) \dfrac{1}{1 + \frac{3}{n^2}} \log \left(\dfrac{3 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{4}{n}} \right)$
   A sucessão $sen(n)$ é uma sucessão limitada. Como $\lim \dfrac{1}{1 + \frac{3}{n^2}} \log \left(\dfrac{3 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{4}{n}} \right) =$
   $\dfrac{1}{1+0} \log \left(\dfrac{3+0}{3+0} \right) = 0$ a sucessão correspondente é um infinitésimo. O produto de uma sucessão limitada por um infinitésimo é um infinitésimo, assim $\lim c_n = 0$.

3. (a) Pretende-se provar pelo princípio da indução matemática que
   $\dfrac{2^n}{n!} \leq 2 \left(\dfrac{2}{3} \right)^{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.
   (i) : A proposição é verdadeira para $n = 3$.
   Para $n = 3$ vem: $\dfrac{2^3}{3!} \leq 2 \left(\dfrac{2}{3} \right)^{3-2}$. Como $\dfrac{2^3}{3!} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} = 2 \left(\dfrac{2}{3} \right)$ que é uma proposição verdadeira.

(ii) : Hereditariedade

De seguida, é necessário demonstrar que $p(k) \Longrightarrow p(k+1)$, com k um natural qualquer maior ou igual a 3.

A hipótese de indução é:

$H : \dfrac{2^k}{k!} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2}$

Pretende-se provar que:

$T : \dfrac{2^{k+1}}{(k+1)!} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$

Dem :

$\dfrac{2^{k+1}}{(k+1)!} = \dfrac{2^k}{k!}\dfrac{2}{(k+1)}$ por hipótese de indução $\dfrac{2^k}{k!}\dfrac{2}{(k+1)} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2}\dfrac{2}{k+1}$.

Como $n \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ tem-se $k+1 \geq 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{3}$.

Assim, $2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2}\dfrac{2}{k+1} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$

Por (i) e (ii) prova-se, pelo princípio da indução matemática, que

$\dfrac{2^n}{n!} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$.

(b) Seja $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}}$ definida por $v_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$, $\lim v_n = \lim 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} = 0$. Pela alínea (a) $x_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ logo $\lim x_n \leq \lim v_n = 0$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ é uma sucessão de termos positivos, $\lim x_n \geq 0$ logo $\lim x_n = 0$.

(c) A sucessão é convergente como se provou pela alínea anterior, logo a sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

4. (a) Considere-se as sucessões $u_n = \frac{1}{n}$ e $v_n = -\frac{1}{n}$ convergentes para 0.
Seja $f(x) = x + sinal(x)$.
$\lim f(u_n) = \lim\left(\dfrac{1}{n}+1\right) = 1$, $\lim f(v_n) = \lim\left(-\dfrac{1}{n}-1\right) = -1$.
Como $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$ não existe $\lim\limits_{x\to 0}[x + sinal(x)]$.

(b) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x-2}{x^2+x-6} + x\cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x-2}{(x-2)(x+3)} + x\cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{x+3} + x\cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)\right] = \dfrac{1}{5} + 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{5} + \sqrt{2}$.

(c) Como existe $\lim_{x\to 2} g(x)$ é possível prolongar por continuidade a função $g(x)$ ao ponto $x=2$.
$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2+x-6 \neq 0 \wedge 2x \neq\} = \mathbb{R}\backslash\{-3,0,2\}$.

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2+x-6} + x\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right), & x \neq -3 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2; \\ \frac{1}{5}+\sqrt{2}, & x = 2 \end{cases}$$

5. (a) A função $g(x)$ é contínua em $[0,1]$ por ser a diferença de duas funções contínuas, uma composta de funções contínuas ($[f(x)]^2$) e um polinómio.

(b) Como $f(x)$ toma valores entre 0 e 1, $g(0) = f(0)^2 \geq 0$, $g(1) = f(1)^2 - 1 \leq 0$. Se $g(0)=0$ ou $g(1)=0$ então $\exists c \in [0,1] : g(c)=0$. Se $g(0) \neq 0$ e $g(1) \neq 0$ como $g(0) > 0$ e $g(1) < 0$ e g é contínua em $[0,1]$, pelo Teorema de Bolzano $\exists c \in [0,1] : g(c) = 0$
$g(c) = 0 \Leftrightarrow [f(c)]^2 - c = 0 \Leftrightarrow [f(c)]^2$=c$\Leftrightarrow f(c) = \pm\sqrt{c}$. $f(c) \neq -\sqrt{c}$ porque $f(c) \geq 0$ logo $f(c) = \sqrt{c}$.