FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B e C)

Repetição do 1º Teste — 27 de Janeiro de 2010

1. (*4 val.*) Considere os conjuntos:

$$A = [-\sqrt{3}; -1] \cap \mathbb{Q}, \quad B = \{e^{-n}, n \in \mathbb{N}\} \text{ e } C = \left\{x \in \mathbb{N} : \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right) < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

   (a) Calcule o interior e o derivado de $A \cup B$.

   (b) Será B um conjunto fechado? Justifique a sua resposta.

   (c) Explicite o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de $A \cup B \cup C$. Indique, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cup B \cup C$. Justifique.

2. (*4,5 val.*) Calcule, justificando, os limites das seguintes sucessões:

   (a) $b_n = \dfrac{2^n + 3^{n+1}}{e^{n-1} - \pi^n}$;

   (b) $c_n = \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n^2 + 3} \log \left[\left(\dfrac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2}\right]$.

3. (*4,5 val.*) Considere a sucessão $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $x_n = \frac{2^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   (a) Utilizando o Princípio de Indução Matemática, mostre que:

$$\frac{2^n}{n!} \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$$

   (b) Recorrendo à alínea anterior, calcule o $\lim x_n$.

   (c) A sucessão $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada? Justifique.

4. (*4 val.*) Calcule os seguintes limites ou justifique a sua não existência, neste último caso recorrendo à caracterização sequencial de limite (definição segundo Heine):

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} [x + sinal(x)]$ onde $sinal(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

   (b) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{x-2}{x^2 + x - 6} + x \cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)\right]$

   (c) Será possível prolongar por continuidade a função $g(x) = \dfrac{x-2}{x^2+x-6} + x\cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)$ ao ponto $x = 2$? Em caso afirmativo, explicite a função prolongamento.

5. (*3 val.*)

   Seja $f : [0; 1] \to [0; 1]$ uma função contínua.

   (a) Justifique a continuidade da função $g(x) = [f(x)]^2 - x$.

   (b) Aplique o Teorema de Bolzano à função g por forma a garantir que existe $c \in [0; 1]$ tal que $f(c) = \sqrt{c}$.