Análise Matemática - I (C)
Resolução do 1º Teste

1. (a) O conjunto A é constituído pelos pontos que verificam a inequação $\log(x^2) < 0$.
$\log(x^2) < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \wedge x \neq 0 \Longleftrightarrow -1 < x < 1 \wedge x \neq 0$

Assim, $A =]-1, 0[\cup]0, 1[$.

B é o conjunto dos pontos racionais que verificam a inequação $|x-3| > |x-5|$.

$|x-3| > |x-5| \Longleftrightarrow (x-3)^2 \geq (x-5)^2 \Longleftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq x^2 - 10x + 25 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow 10x - 6x \geq 25 - 9 \Longleftrightarrow \Longleftrightarrow 4x \geq 16 \Longleftrightarrow x \geq 4$

Então, $B = [4, +\infty[\cap \mathbb{Q}$.

(b) Sendo $A =]-1, 0[\cup]0, 1[$, $int(A) =]-1, 0[\cup]0, 1[$,

e $B = [4, +\infty[\cap \mathbb{Q}$, $fr(B) = [4, +\infty[$ temos

$A \cup B =]-1, 0[\cup]0, 1[\cup ([4, +\infty[\cap \mathbb{Q})$, donde

$(A \cup B)' = [-1, 1] \cup [4, +\infty[$.

(c) $A = int(A) =]-1, 0[\cup]0, 1[$, logo A é aberto.

$\overline{A \cup B} = [-1, 1] \cup [4, +\infty[\neq A \cup B$, logo $A \cup B$ não é um conjunto fechado.

(d) $A \cup B =]-1, 0[\cup]0, 1[\cup ([4, +\infty[\cap \mathbb{Q})$

$A \cup B$ não admite majorantes, pois $\nexists y \in \mathbb{R}, \forall x \in A \cup B, y \geq x$. Consequentemente, $A \cup B$ não admite nem máximo nem supremo.

O conjunto dos minorantes de $A \cup B$ é $]-\infty, -1]$. Como nenhum minorante de $A \cup B$ pertence a $A \cup B$ então este conjunto não admite mínimo. O ínfimo de $A \cup B$ é -1, uma vez que este é o elemento máximo do conjunto dos minorantes de $A \cup B$.

2. (a) Pretende-se provar pelo princípio da indução matemática que $p(n) : 0 \leq x_n \leq 3$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

(i) :
Para $n = 1$ vem: $p(1) : 0 \leq x_1 \leq 3$. Como $x_1 = 2$ e $0 \leq 2 \leq 3$ tem-se que $p(1)$ é uma proposição verdadeira.

(ii) :
De seguida, é necessário demonstrar que $p(k) \Longrightarrow p(k+1)$, com k um natural qualquer.

A hipótese de indução é:
$H : 0 \leq x_k \leq 3$

Pretende-se provar que:
$T : 0 \leq x_{k+1} \leq 3$

Dem :
Por hipótese de indução, sabe-se que $0 \leq x_k \leq 3$.
$0 \leq x_k \leq 3 \Longleftrightarrow 0 \leq 2x_k \leq 6 \Longleftrightarrow 3 \leq 2x_k + 3 \leq 9 \Longleftrightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{2x_k + 3} \leq \sqrt{9} \Longleftrightarrow$
$\sqrt{3} \leq x_{k+1} \leq 3 \Longrightarrow 0 \leq x_{k+1} \leq 3$, uma vez que $0 \leq \sqrt{3}$.

Por (i) e (ii) prova-se, pelo princípio da indução matemática, que $0 \leq x_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Para se estudar a monotonia da sucessão x_n é necessário avaliar a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer.

$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2x_n + 3} - x_n = \frac{(\sqrt{2x_n+3}-x_n)(\sqrt{2x_n+3}+x_n)}{\sqrt{2x_n+3}+x_n} = \frac{2x_n+3-x_n^2}{\sqrt{2x_n+3}+x_n}$

Uma vez que $\sqrt{2x_n + 3} + x_n > 0$, pois pela alínea anterior $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0$, para se conhecer o sinal de $x_{n+1} - x_n$ basta estudar o sinal de $2x_n + 3 - x_n^2$ que é um polinómio de 2º grau em x_n.
$2x_n + 3 - x_n^2 = 0 \Longleftrightarrow x_n = \frac{-2\pm\sqrt{4-4(-1)3}}{-2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{-2} = \frac{-2\pm4}{-2} \Longleftrightarrow x_n = -1 \vee x_n = 3$
$2x_n + 3 - x_n^2 = -(x_n + 1)(x_n - 3)$.

Na alínea (a) provou-se que $0 \leq x_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$, donde $2x_n + 3 - x_n^2 = -(x_n + 1)(x_n - 3) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. O que significa que x_n é monótona crescente.

(c) Pela alínea (a) mostrou-se que x_n é uma sucessão limitada e pela alínea (b) provou-se que x_n é uma sucessão monótona, pelo que se pode concluir que x_n é uma sucessão convergente.

Logo $\exists b \in \mathbb{R} : \lim x_n = b$. Por outro lado, dado que x_n é uma sucessão convergente, o limite de qualquer sua subsucessão será b. Assim, $\lim x_{n+1} = b$. Mas pela expressão de recorrência, $\lim x_{n+1} = b \iff \lim \sqrt{2x_n + 3} = b \iff \lim(2x_n + 3) = b^2$, uma vez que $2x_n + 3 > 0$.

$\lim 2x_n + 3 = b^2 \iff 2b + 3 = b^2 \iff b^2 - 2b - 3 = 0 \iff b = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \iff b = 3 \vee b = -1$.

Como $0 \leq x_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$, sabemos que $\lim x_n \geq 0$, pelo que podemos concluir que $\lim x_n = b = 3$.

3. (a) $\lim a_n = \lim \log(n^n) - \log((n+1)^n) = \lim \log(\frac{n^n}{(n+1)^n}) = \lim \log((\frac{n}{n+1})^n) = \lim \log\left(\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\right) = \log(e^{-1}) = -1$

(b) $\lim b_n = \lim \sqrt[n]{3^n + 2^n} = \lim \sqrt[n]{3^n(1 + (\frac{2}{3})^n)} = \lim 3(1 + (\frac{2}{3})^n)^{1/n} = 3 \times 1^0 = 3$.

Alternativamente, como $3^n + 2^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, pode-se calcular:

$\lim \frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n} = \lim \frac{\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{3^n}{3^{n+1}} + \frac{2^n}{3^{n+1}}} = \lim \frac{1+(\frac{2}{3})^{n+1}}{\frac{1}{3}+(\frac{2}{3})^n \times \frac{1}{3}} = \frac{1+0}{\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

$\lim \frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n} = 3 \Longrightarrow \lim \sqrt[n]{3^n + 2^n} = 3$.

(c) $\lim c_n = \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4+5k}}$

Considere-se as seguintes sucessões:

$x_n = n\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4+5}}$ e
$y_n = n\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4+5n}}$

$y_n \leq c_n \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Por outro lado,
$\lim y_n = \lim n\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4+5n}} = \lim \frac{\sqrt[3]{n \times n^3}}{\sqrt[3]{n^4+5n}} = \lim \frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt[3]{n^4+5n}} = \lim \sqrt[3]{\frac{n^4}{n^4+5n}} = \lim \sqrt[3]{\frac{1}{1+\frac{5}{n^3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1+0}} = \sqrt[3]{1} = 1$

$\lim x_n = \lim n\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4+5}} = \lim \frac{\sqrt[3]{n \times n^3}}{\sqrt[3]{n^4+5}} = \lim \frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt[3]{n^4+5}} = \lim \sqrt[3]{\frac{n^4}{n^4+5}} = \lim \sqrt[3]{\frac{1}{1+\frac{5}{n^4}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1+0}} = \sqrt[3]{1} = 1$

Como $\lim x_n = \lim y_n = 1$ e $y_n \leq c_n \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, pode afirmar-se, pelo Teorema das Sucessões Enquadradas, que $\lim c_n = 1$.

4. (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : (x+1 > 0 \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} = (]-1,+\infty[\cap [0,+\infty[) \bigcup]-\infty, 0[= [0,+\infty[\bigcup]-\infty, 0[= \mathbb{R}$.

   (b) Para $x < 0, f(x) = e^x + 1$ é uma função contínua pois é a soma de funções contínuas (uma exponencial e uma constante). Para $x > 0, f(x) = 2a + (x-1)\log(x+1)$ também é contínua, independentemente do valor de a, uma vez que resulta da soma de uma constante com o produto de duas funções contínuas em $]0,+\infty[$ (um polinómio e a composta de um logaritmo com outro polinómio).

   Analisemos a continuidade de f no ponto $x = 0$.

   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2a + (x-1)\log(x+1) = 2a + (-1)\log(1) = 2a$
   $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x + 1 = e^0 + 1 = 2.$

   Se $a = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 2$ e como tal f é contínua em $D_f = \mathbb{R}$.

   Se $a \neq 1$, o $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe, pelo que f será contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

   (c) Considere-se $a = 1$. A função f é contínua em $\mathbb{R}$. Em particular, é contínua no intervalo [-3,1]. Pelo Teorema de Weierstrasse, toda a função contínua num intervalo limitado e fechado admite um máximo e um mínimo nesse conjunto, donde se pode concluir que existem máximo e mínimo de f em $[-3, 1]$.

   (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 2a + (x-1)\log(x+1) = 2a + \infty = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} e^x + 1 = 0 + 1 = 1$

5. Sabe-se que f é contínua no intervalo I e que $f(I)$ é um conjunto finito. Pretende-se provar que f é constante.

   O Corolário 2 do Teorema de Bolzano garante que a imagem do intervalo I por f, isto é $f(I)$ é ainda um intervalo, pois f é contínua em I. Por outro lado, $f(I)$ é um conjunto finito, isto é, a cardinalidade de $f(I)$ é um número natural. Mas os únicos intervalos com cardinalidade finita são os intervalos do tipo $[y, y]$, isto é, os intervalos constituídos por um único elemento y. Mas isso, significa que $\forall x \in I, f(x) = y$, isto é, f é constante em I.

Uma resolução alternativa seria provar que f é constante por redução ao absurdo. Suponhamos que f não é constante em I. Então existem $x, y \in I$ tais que $f(x) \neq f(y)$. Como f é contínua em I, o Teorema de Bolzano garante que f assume todos os valores entre $f(x)$ e $f(y)$, logo $f(I)$ não será um conjunto finito, o que é um absurdo.