FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B e C)

1º Teste — 25 de Novembro de 2009

1. (*4,5 val.*) Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2) < 0\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{Q} : |x-3| \geq |x-5|\}.$$

   (a) Determine A e B na forma de união de intervalos ou intersecção de intervalos com $\mathbb{Q}$.
   Nota: Se não conseguiu determinar A e B considere, nas alíneas seguintes, $A =]0,2[\cup]2,5[$ e $B = [10,+\infty[\cap\mathbb{Q}$.

   (b) Calcule o interior de A, a fronteira de B e o derivado de $A \cup B$.

   (c) O conjunto A é aberto? Será $A \cup B$ fechado? Justifique as suas respostas.

   (d) Indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes de $A \cup B$ e, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cup B$. Justifique.

2. (*3,5 val.*) Considere a sucessão, definida por recorrência,

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   (a) Prove, por indução, que $0 \leq x_n \leq 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Prove que a sucessão é monótona.

   (c) Prove que a sucessão é convergente e calcule, justificando, o seu limite.

3. (*4,5 val.*) Calcule, justificando, os limites das seguintes sucessões:

   (a) $a_n = \log(n^n) - \log((n+1)^n)$;

   (b) $b_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$;

   (c) $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4 + 5k}}$.

4. (*5,5 val.*) Considere a função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2a - (x-1)\log(x+1), & \text{se } x \geq 0 \\ e^x + 1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Determine o domínio da função f.

   (b) Estude a continuidade de f.

   (c) Considere o valor de a que torna a função contínua em 0. Justifique a existência de máximo e mínimo de f no intervalo $[-3,1]$.

   (d) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

5. (*2 val.*) Seja f uma função contínua num intervalo I e suponha que $f(I)$ é finito. Mostre que f é constante em I.