**Análise Matemática - I (C)**
**Resolução da Repetição do 2º Teste - 27 Janeiro 2010**

1. (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \vee x < 0\} = \mathbb{R}$.

Estudo da diferenciabilidade:

Para $x > 0$: A função está definida por uma função polinomial, diferenciável em $\mathbb{R}$, logo é diferenciável neste subconjunto.
Para $x < 0$: A função está definida por uma função trigonométrica, diferenciável em $\mathbb{R}$, logo é diferenciável neste subconjunto.
Para $x = 0$:
Estude-se a existência de derivada no ponto 0.

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x^2 + \frac{3}{2}x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) = 0$$

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x) - 0}{x - 0} = 1$$

Como $f'_d(0) = f'_e(0)$ não existe $f'(0)$. $\therefore$ $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Para determinar os extremos relativos, começe-se por determinar os pontos de estacionaridade da função.
Para $x > 0$:

$$f'(x) = \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)' = 3x^2 + \frac{3}{2}.2x = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0 \vee x = -1}_{\notin ]0,+\infty[}$$

Para $x < 0$:

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Os pontos de estacionaridade que estão no intervalo $]-\infty, 0[$, são todos os pontos da forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}^-$. Dada a periodicidade da função $\cos(x)$, bastará analisar um subintervalo de $\mathbb{R}^-$ de amplitude $2\pi$, para se indicar todos os extremos relativos da função.

| | $-\infty$ | $-2\pi$ | | $-\frac{3}{2}\pi$ | | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(x)$ | $\ldots$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\backslash\backslash\backslash$ | $+$ | $\backslash\backslash\backslash$ | $\backslash\backslash\backslash$ | |
| $3x(x+1)$ | $\backslash\backslash\backslash$ | $\backslash\backslash\backslash$ | $\backslash\backslash\backslash$ | $\backslash\backslash\backslash$ | $\backslash\backslash\backslash$ | $\backslash\backslash\backslash$ | $\backslash\backslash\backslash$ | $\backslash\backslash\backslash$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | $\ldots$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\backslash\backslash\backslash$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\ldots$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

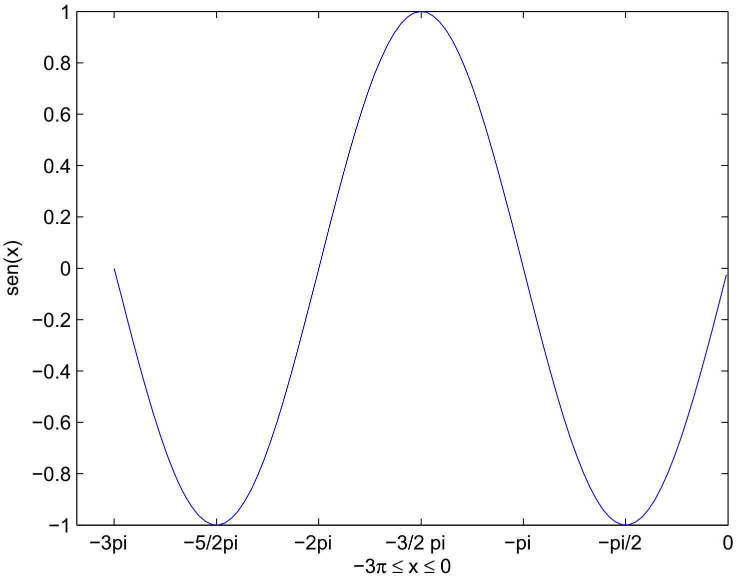
Da análise do quadro e atendendo à continuidade da função pode-se afirmar que:
- os pontos da forma $x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}^-$ são pontos de mínimos relativos da função, tendo a função o seu mínimo relativo nestes pontos igual a $-1$;
- os pontos $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}^-$ são pontos de máximos relativos, correspondentes ao máximo relativo da função igual a 1.

No ponto $x = 0$, dado que a função apresenta monotonia crescente numa vizinhança desse ponto, pode-se afirmar que se a função for contínua no ponto zero, não admite extremo em $x = 0$. De facto, é fácil concluir que a função é contínua em $x = 0$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ e consequentemente $f$ não admite extremo relativo neste ponto.

Alternativamente, para o estudo dos extremos da função $f$ em $\mathbb{R}^-$ poder-se-ia ter desenhado o gráfico da função $\mathrm{sen}(x)$, num subintervalo de $\mathbb{R}^-$, como se mostra na figura abaixo, e referir que devido à periodicidade desta função, todos os pontos $x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}^-$ são pontos de mínimo da função e todos os pontos $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}^-$ são pontos de máximo de $f$.

(b) Estude-se o sinal da segunda derivada para analisar a concavidade de $f$.
Para $x > 0$:
$f''(x) = 6x + 3$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \notin ]0, +\infty[$, logo $f''(x)$ não tem zeros no intervalo $]0, +\infty[$.
Para $x < 0$:
$f''(x) = -\mathrm{sen}(x)$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\mathrm{sen}(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}^-$.
Para $x = 0$:
Como não existe $f'(0)$ também não existe $f''(0)$.

Analogamente ao que foi efectuado para o estudo dos extremos, apresenta-se apenas o comportamento de $f''(x)$ num subintervalo de $\mathbb{R}^-$ de amplitude $2\pi$.




| | $-\infty$ | $-2\pi$ | | $-\pi$ | | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\text{sen}(x)$ | $\ldots$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | \\\ | \\\ |
| $6x+3$ | \\\ | \\\ | \\\ | \\\ | \\\ | \\\ | $+$ |
| $f''(x)$ | $\ldots$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | \\\ | $+$ |
| $f(x)$ | $\ldots$ | $0$ | $\cap$ | $1$ | $\cup$ | $0$ | $\cup$ |

$f(x)$ tem a concavidade voltada para cima em todos os subintervalos de $\mathbb{R}^-$ da forma $](2k-1)\pi, 2k\pi[,\ k \in \mathbb{Z}_0^-$ e em $]0, +\infty[$.
$f(x)$ tem a concavidade voltada para baixo em todos os subintervalos $](2k-2)\pi, (2k-1)\pi[,\ k \in \mathbb{Z}^-$.
Todos os pontos $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}^-$ são pontos de inflexão de $f$.

Alternativamente, para o estudo dos sentidos de concavidade da função $f$ em $\mathbb{R}^-$ poder-se-ia recorrer ao esboço gráfico da alínea anterior e retirar as conclusões anteriores, quanto ao sentido de concavidade e pontos de inflexão de $f$.

(c) No intervalo $[0, 1]$ a função está definida por $x^3 + \dfrac{3}{2}x^2$. Foi visto nas alíneas anteriores que a função é contínua e estritamente crescente neste intervalo,logo no máximo admite um zero, o que equivale a afirmar que a equação $f(x) = 0$ tem no máximo uma raíz.

2. (a) No cálculo do limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{3x}\right)^{\cos(x+\frac{\pi}{2})} = \lim_{x\to 0^+} (3x)^{\text{sen}(x)}$ surge uma indeterminação do tipo $0^0$ que podemos converter numa do tipo $0 \times \infty$. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (3x)^{\text{sen}(x)} =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\log\left[(3x)^{\operatorname{sen}(x)}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x)\log(3x)}$. Calcule-se o $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x)\log(3x)$, que é uma indeterminação do tipo $0\times\infty$, que pode ser convertida numa indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ considerando $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log(3x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}$. Com vista à utilização da regra de Cauchy, considere-se $f(x) = \log(3x)$ e $g(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$, e verifique-se as condições necessárias à sua aplicação no intervalo $I = ]0, \frac{\pi}{4}[$.

- indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$
- $f$ e $g$ são diferenciáveis em $I$
- $g'(x) = \frac{-\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \neq 0, \forall x \in I$ ($g'(x)$ anula-se em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$)

Calcule-se $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Se este limite existir então $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existirá e tomará o mesmo valor.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{x}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \frac{-1\times 0}{1} = 0.$$

Pela Regra de Cauchy, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe e toma o mesmo valor, pelo que, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{3x}\right)^{\cos(x+\frac{\pi}{2})} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x)\log(3x)} = e^0 = 1$

3. (a) Sendo $f(x) = \sqrt{1+x}$, de domínio $[-1, +\infty[$, uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $[-1, +\infty[$, pode fazer-se o desenvolvimento de Taylor em torno do ponto 0 de $f(x)$ até à ordem $n \in \mathbb{N}$.

   A Fórmula de Taylor em torno do ponto 0, com resto de Lagrange de ordem 2 é dada por:

   $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(c)$ com $c$ entre 0 e $x$.

   $f(x) = \sqrt{1+x}$
   $f(0) = 1$
   $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$
   $f'(0) = \frac{1}{2}$
   $f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$
   $f''(c) = -\frac{1}{4}(1+c)^{-3/2}$

   Assim, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{x^2}{2!}(1+c)^{-3/2} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}(1+c)^{-3/2}, \forall x > 0$.

   Como $x > 0$,

$$0 < c < x \Leftrightarrow$$

$$1 < 1 + c < 1 + x \Leftrightarrow$$
$$1 < (1 + c)^{3/2} < (1 + x)^{3/2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{(1 + x)^{3/2}} < \frac{1}{(1 + c)^{3/2}} < 1 \Rightarrow$$
$$-1 < -\frac{1}{(1 + c)^{3/2}} < -\frac{1}{(1 + x)^{3/2}} < 0$$

Considerando,

$$-1 < -\frac{1}{(1 + c)^{3/2}} < 0 \Leftrightarrow$$
$$-\frac{x^2}{8} < -\frac{x^2}{8}\frac{1}{(1 + c)^{3/2}} < 0 \Leftrightarrow$$
$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\frac{1}{(1 + c)^{3/2}} < 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow$$
$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\frac{1}{(1 + c)^{3/2}} \leq 1 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow$$
$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1 + x} \leq 1 + \frac{x}{2}, \forall x > 0$$

(b) $\sqrt{2} = \sqrt{1 + 1}$, pela alínea (a)

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \leq \sqrt{1 + 1} \leq 1 + \frac{1}{2}$$
$$1,5 - \frac{1}{8} \leq \sqrt{2} \leq 1,5$$

Quando se afirma que $\sqrt{2} \simeq 1,5$ comete-se um erro inferior ou igual a $\frac{1}{8}$.

(c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}(1 + c)^{-3/2} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\frac{x^2}{8}(1 + c)^{-3/2}}{x^2} =$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-x^2}{8x^2(1 + c)^{3/2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-1}{8(1 + c)^{3/2}}$, com $0 < c < x$. Se $x \to 0^+ \Rightarrow c \to 0^+$, pelo que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-1}{8(1 + c)^{3/2}} = -\dfrac{1}{8}$

4. (a) Mostre-se que quando $\tan(\frac{x}{2}) = t$ se tem $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
$\cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \mathrm{sen}^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} - \frac{\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
$\tan(\frac{x}{2}) = t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \arctan(t) \Leftrightarrow x = 2\arctan(t)$ donde $\dfrac{dx}{dt} = 2\dfrac{1}{1 + t^2}$. Quando $x = 0 \Rightarrow t = \tan(0) = 0$ e quando $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$

Assim, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+3\cos(x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \times 2\frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{2}{5(1+t^2)+3(1-t^2)}dt =$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{8+2t^2}dt = \int_0^1 \frac{1/4}{1+\frac{t^2}{4}}dt = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1/2}{1+(\frac{t}{2})^2}dt = \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^1 =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan(0)\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

(b) Primitive-se $g(x)$ por partes. Para tal derive-se a função $\log(x^2+1)$ e primitive-se a função $x$.

$\left[\log(x^2+1)\right]' = \dfrac{2x}{x^2+1}$ e $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$.

$\displaystyle\int x\log(x^2+1)dx = \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{x^2+1}dx \overset{(*)}{=}$
$\frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int\left(x + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$, com $C \in \mathbb{R}$

$^{(*)}\dfrac{x^2}{2}\dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{x^3}{x^2+1} = x - \dfrac{x}{x^2+1} = x - \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Quando $x = 0$, $\displaystyle\int x\log(x^2+1)dx$ toma o valor 1. Assim $\dfrac{0^2}{2}\log(0^2+1) - \dfrac{0^2}{2} + \dfrac{1}{2}\log(0^2+1) + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$. A primitiva pretendida é $\dfrac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) + 1$.

5. A função integranda $f(x) = \dfrac{(3x+1)\cos(x)}{x^3-x}$ tem domínio $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$. A função está definida no intervalo $[2,+\infty[$ pelo que estamos perante um integral impróprio de 1ª espécie.

Como $3x+1 \geq 0, \forall x \geq 2$, $x^3 - x \geq 0, \forall x \geq 2$ e $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ vem

$$\left|\frac{(3x+1)\cos(x)}{x^3-x}\right| \leq \frac{3x+1}{x^3-x}, \forall x \geq 2. \tag{1}$$

Estude-se a convergência do integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3x+1}{x^3-x}dx$, que é um integral impróprio de 1ª espécie com função integranda não negativa.

Considere-se o integral convergente $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$, de função integranda não negativa.

Determine-se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x+1}{x^3-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+x^2}{x^3-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 3$, finito e não nulo.

Então os integrais são da mesma natureza, isto é, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3x+1}{x^3-x}dx$ é um integral convergente. Atendendo à desigualdade (1) o integral $\displaystyle\int_2^{+\infty}\left|\frac{(3x+1)\cos(x)}{x^3-x}\right|dx$ é convergente pelo que o integral $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{(3x+1)\cos(x)}{x^3-x}dx$ é absolutamente convergente.

6. Considere-se a função $g(x) = \log(f(x))$ que está bem definida pois $f(x)$ é positiva em $[a, b]$. A função $g(x)$ é contínua em $[a, b]$, por ser a composta de duas funções contínuas em $[a, b]$ e é diferenciável em $]a, b[$, novamente por ser a composta de duas funções diferenciaveis em $]a, b[$ sendo a sua derivada $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Pelo Teorema de Lagrange existe $c \in ]a, b[$ tal que $g'(c) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$. Assim $g'(c) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a} \Leftrightarrow$ $\dfrac{f'(c)}{f(c)} = \dfrac{\log(f(b)) - \log(f(a))}{b - a} \Leftrightarrow (b - a)\dfrac{f'(c)}{f(c)} = \log\left(\dfrac{f(b)}{f(a)}\right) \Leftrightarrow e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}} = \dfrac{f(b)}{f(a)}$.