FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B e C)

Repetição do 2º Teste — 27 de Janeiro de 2010

1. (*4 val.*) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \frac{3}{2}x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ \mathsf{sen}(x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

   (a) Estude a diferenciabilidade e os extremos relativos de f.

   (b) Determine os sentidos de concavidade de f e os seus pontos de inflexão.

   (c) Mostre que a equação $f(x) = 0$ não pode ter duas raízes distintas no intervalo $[0, 1]$.

2. (*3,5 val.*) Calcule, justificando, o seguinte limite

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{3x} \right)^{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

3. (*4 val.*)

   (a) Mostre que $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$, para $x > 0$.
   Sugestão: Escreva a fórmula de Taylor, em torno do ponto 0, para a função $\sqrt{1+x}$.

   (b) Utilizando a alínea (a), indique uma estimativa do erro que se comete ao afirmar que $\sqrt{2} \simeq 1.5$.

   (c) Recorrendo novamente à alínea (a), calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$.

4. (*4 val.*)

   (a) Calcule $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5 + 3\cos x} dx$.
   Sugestão: Use a mudança de variável $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$ (mostre que $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$).

   (b) Calcule a primitiva da função $g(x) = x \log(x^2 + 1)$, que toma o valor 1 em $x = 0$.

5. (*2 val.*) Usando os critérios de convergência, estude a natureza (ou convergência) do integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{(3x+1)\cos(x)}{x^3 - x} dx.$$

6. (*2,5 val.*) Seja f uma função contínua e positiva no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, diferenciável em $]a, b[$. Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$