

1. (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : (1 + x^2 \neq 0 \wedge x \leq 0) \vee x > 0\}$

Dado que $1 + x^2 \neq 0$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$, o domínio da função f é $\mathbb{R}$.

Para determinarmos a monotonia, vamos estudar o sinal da 1ª derivada.

Para $x < 0$:

$$f'(x) = \frac{2(1 + x^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(1 - x^2) = 0 \wedge \underbrace{(1 + x^2)^2 \neq 0}_{\text{Cond. Univ.}} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$\therefore x = -1$ é zero de $f'(x)$, pois $-1 \in]-\infty, 0[$

Para $x > 0$:

$f'(x) = -3e^{3x}$, pelo que para $x > 0$, $f'(x)$ não tem zeros

Para $x = 0$:

Vamos estudar a existência de derivada no ponto 0.

$$f'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{2x}{1 + x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{1 + x^2} = 2$$

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{3x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(e^{3x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(e^{3x} - 1)3}{3x} = -3$$

Como $f'_e(0) \neq f'_d(0)$, f não é diferenciável em $x = 0$.

	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$\frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$	$-$	0	$+$	$\backslash \backslash \backslash$	$\backslash \backslash \backslash$
$-3e^{3x}$	$\backslash \backslash \backslash$	$\backslash \backslash \backslash$	$\backslash \backslash \backslash$	$\backslash \backslash \backslash$	$-$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\backslash \backslash \backslash$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$

$f(x)$ é decrescente em $] - \infty, -1[$ e em $]0, +\infty[$

$f(x)$ é crescente em $] - 1, 0[$

Como f é diferenciável em $x = -1$ sabemos que f é contínua em $x = -1$, pelo que podemos afirmar que $f(-1) = -1$ é mínimo relativo de f .

A função f não é diferenciável no ponto $x = 0$, pelo que é necessário analisar a continuidade de f em $x = 0$ para se poder concluir se $f(0)$ é ou não um extremo relativo da função.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{1+x^2} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - e^{3x} = 1 - 1 = 0$$

Dado que a função é contínua em $x = 0$ e existe mudança de monotonia numa vizinhança do ponto zero, podemos afirmar que $f(0)$ é extremo relativo de f , neste caso, máximo relativo.

- (b) Estudemos o sinal da segunda derivada para analisarmos a concavidade de f .

Para $x < 0$:

$$f''(x) = \left(\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \right)' = \frac{2(-2x)(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)2x \cdot 2(1-x^2)}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{(1+x^2)(-4x(1+x^2) - 8x(1-x^2))}{(1+x^2)^4} = \frac{-12x + 4x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{4x(x^2 - 3)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (4x = 0 \vee x^2 = 3) \wedge \underbrace{(1+x^2)^3 \neq 0}_{\text{Cond. Univ.}} \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3})$$

$\therefore x = -\sqrt{3}$ é zero de $f''(x)$, pois $-\sqrt{3} \in]-\infty, 0[$

Para $x > 0$:

$f''(x) = -9e^{3x}$, pelo que para $x > 0$, $f''(x)$ não tem zeros, pois a função exponencial nunca se anula

Para $x = 0$:

Como não existe $f'(0)$ também não existe $f''(0)$.

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0	$+\infty$
$\frac{4x(x^2 - 3)}{(1+x^2)^3}$	-	0	+	\\ \\	\\ \\
$-9e^{3x}$	\\ \\	\\ \\	\\ \\	\\ \\	-
$f''(x)$	-	0	+	\\ \\	-
$f(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cap$

$f(x)$ tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, -\sqrt{3}[$ e em $]0, +\infty[$

$f(x)$ tem a concavidade voltada para cima em $] -\sqrt{3}, 0[$

$(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3}))$ é ponto de inflexão de f

Como não existe $f'(0)$, f não admite ponto de inflexão em $x = 0$, apesar de nesse ponto mudar o sentido da concavidade da função.

2. No cálculo do limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \log(1+x) - x}{x^2}$ surge uma indeterminação de tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Dado que no denominador da expressão figura um polinómio, vamos considerar uma expansão em fórmula de MacLaurin para a função que figura no numerador da fracção, o que nos

permitirá resolver a referida indeterminação.

Sabemos que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x)$, onde $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_1(x) = 0$. Por outro lado, $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_2(x)$, onde $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_2(x) = 0$. As propriedades de cálculo dos desenvolvimentos limitados permitem-nos concluir que $e^x \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 + x^2\epsilon_3(x) = x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_3(x)$, onde $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_3(x) = 0$. Daqui resulta que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \log(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_3(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \epsilon_3(x) \right) = \frac{1}{2}.$$

Alternativamente, para calcular o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \log(1+x) - x}{x^2}$ poder-se-ia utilizar a regra de Cauchy, uma vez que estamos perante uma indeterminação de tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Considerando $f(x) = e^x \log(1+x) - x$ e $g(x) = x^2$, podemos afirmar que são verificadas as condições de aplicação da regra de Cauchy, pois:

- f e g são diferenciáveis em $] -1, 1[\setminus \{0\}$
- $g'(x) = 2x \neq 0, \forall x \in] -1, 1[\setminus \{0\}$

Calcule-se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Se este limite existir então $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e tomará o mesmo valor.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \log(1+x) + \frac{e^x}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \left(\log(1+x) + \frac{1}{1+x} \right) - 1}{2x}, \text{ surgindo}$$

novamente uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\text{Sendo } h(x) = e^x \left(\log(1+x) + \frac{1}{1+x} \right) - 1 \text{ e } i(x) = 2x$$

- h e i são funções diferenciáveis em $] -1, 1[\setminus \{0\}$
- $i'(x) = 2 \neq 0, \forall x \in] -1, 1[\setminus \{0\}$.

$$\text{Calcule-se } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h'(x)}{i'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \left(\log(1+x) + \frac{1}{1+x} \right) + e^x \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pela Regra de Cauchy, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{i(x)}$ existe e toma o mesmo valor, pelo que, recorrendo novamente à Regra de Cauchy, podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$.

3. Sendo f uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}$, a Fórmula de Taylor da função f em torno do ponto 0, com resto de Lagrange de ordem 3 é dada por:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(c), \text{ com } 0 < c < x \text{ ou } x < c < 0.$$

$$f(x) = e^x(x - 5)$$

$$f(0) = -5$$

$$f'(x) = e^x(x - 4) \Rightarrow f'(0) = -4$$

$$f''(x) = e^x(x - 3) \Rightarrow f''(0) = -3$$

$$f'''(x) = e^x(x - 2) \Rightarrow f'''(c) = e^c(c - 2)$$

Assim,

$$e^x(x - 5) = -5 - 4x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{6}e^c(c - 2), \text{ com } 0 < c < x \text{ ou } x < c < 0.$$

$$\begin{aligned} 4. \quad (a) \quad & \int_{\log(\frac{\pi}{4})}^{\log(\frac{\pi}{3})} \operatorname{tg}(e^x)e^x dx = \int_{\log(\frac{\pi}{4})}^{\log(\frac{\pi}{3})} \frac{\operatorname{sen}(e^x)}{\cos(e^x)} e^x dx = - \int_{\log(\frac{\pi}{4})}^{\log(\frac{\pi}{3})} \frac{\operatorname{sen}(e^x) e^x}{\cos(e^x)} dx = - [\log|\cos(e^x)|]_{\log(\frac{\pi}{4})}^{\log(\frac{\pi}{3})} = \\ & = - \left(\log|\cos(e^{\log(\frac{\pi}{3})})| - \log|\cos(e^{\log(\frac{\pi}{4})})| \right) = - \left(\log\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| - \log\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \right) = \\ & -\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \log\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \log(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\log(2) \\ (b) \quad & \int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2(2x^2+2)} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2(x^2+1)} dx \end{aligned}$$

Vamos fazer a decomposição da função racional, usando cálculos auxiliares. O polinómio do denominador tem a raiz real 2 com multiplicidade 2, e o polinómio $(x^2 + 1)$ não apresenta raízes reais, pelo que a decomposição da função racional ficará

$$\frac{1}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Reduzindo ao mesmo denominador obtemos:

$$\frac{1}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)}{(x-2)^2(x^2+1)} + \frac{B(x-2)(x^2+1)}{(x-2)(x-2)(x^2+1)} + \frac{(Cx+D)(x-2)^2}{(x^2+1)(x-2)^2}.$$

Igualando o numerador das fracções obtemos então

$$1 = A(x^2+1) + B(x-2)(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$1 = Ax^2 + A + (Bx-2B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-4x+4) \Leftrightarrow$$

$$1 = Ax^2 + A + Bx^3 + Bx - 2Bx^2 - 2B + Cx^3 + 4Cx - 4Cx^2 + Dx^2 + 4D - 4Dx,$$

que conduz ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} B+C=0 \\ A-2B-4C+D=0 \\ B+4C-4D=0 \\ A-2B+4D=1 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} B=-C \\ A=2B+4C-D \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ -C+4C-4D=0 \\ -2C+4C-D+2C+4D=1 \end{cases} \\ \begin{cases} - \\ - \\ 3C-4\frac{1-4C}{3}=0 \\ D=\frac{1-4C}{3} \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ 9C-4+16C=0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-4/25 \\ A=1/5 \\ C=4/25 \\ D=3/25 \end{cases} \end{aligned}$$

Deste modo podemos calcular

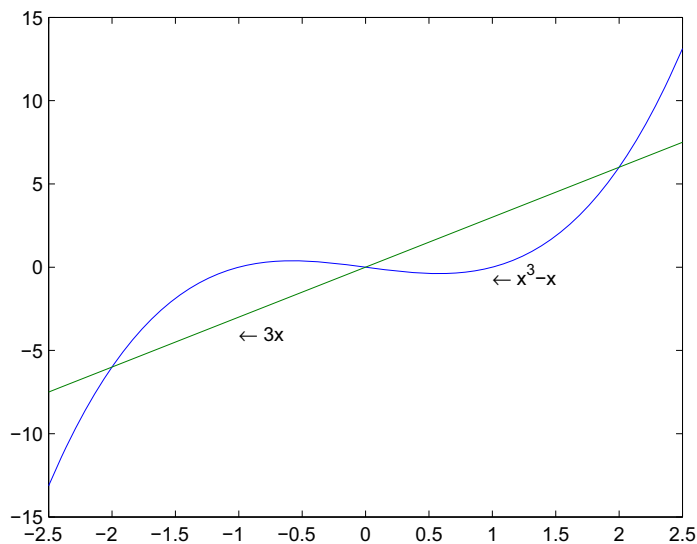
$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2(x^2+1)} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(A \int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2} dx + B \int_0^1 \frac{1}{(x-2)} dx + C \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx + D \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(A \left[\frac{(x-2)^{-1}}{-1} \right]_0^1 + B [\log|x-2|]_0^1 + \frac{C}{2} [\log(x^2+1)]_0^1 + D [\arctg(x)]_0^1 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(A \left(1 - \frac{1}{2} \right) + B(\log 1 - \log 2) + \frac{C}{2}(\log 2 - \log 1) + D(\arctg(1) - \arctg(0)) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{A}{2} - B \log 2 + \frac{C}{2} \log 2 + D \frac{\pi}{4} \right), \\
 & \text{com } A, B, C \text{ e } D \text{ os valores calculados anteriormente.}
 \end{aligned}$$

5. Determinando os pontos de intersecção entre as funções f e g , obtemos

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - x = 3x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$$

Uma vez que a área a calcular é definida recorrendo apenas a duas funções, podemos afirmar que em cada um dos intervalos $[-2, 0]$ e $[0, 2]$ as funções não trocam de posição entre si. Para $x \in]-2, 0[$ sabemos que $f(x) > g(x)$, uma vez que isso acontece por exemplo para $x = -\frac{1}{2}$. Dada a simetria das funções relativamente à origem, podemos concluir que para $x \in]0, 2[$ $f(x) < g(x)$.

Alternativamente poderia esboçar-se o gráfico das funções, conforme se encontra na figura abaixo.



A área pretendida corresponde então ao cálculo de:

$$2 \int_0^2 3x - (x^3 - x) dx = 2 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2 \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 2 \left(8 - \frac{16}{4} \right) = 8$$

6. Para aplicarmos a sugestão temos de justificar a diferenciabilidade de ambos os membros da equação. Como por hipótese f é diferenciável em $]0, +\infty[$, a função do primeiro membro é também diferenciável em $]0, +\infty[$.

Sendo $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, o Teorema Fundamental do Cálculo Integral permite-nos afirmar que F é diferenciável em $]0, +\infty[$, uma vez que f é contínua em $[0, +\infty[$. O mesmo teorema garante que $F'(x) = f(x)$.

Aplicando a sugestão dada, obtemos para $x > 0$

$$2f(x) f'(x) = 2f(x) \Leftrightarrow 2f(x) f'(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow 2f(x)(f'(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 0 \vee (f'(x) - 1) = 0$$

Como por hipótese $f(x) \neq 0$, para $x > 0$, tem-se que $f'(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$, pelo que

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 1 dx = x + C,$$

onde C representa uma constante real que é necessário determinar.

Sabemos que f é contínua em $[0, +\infty[$, pelo que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Como $[f(0)]^2 = 2 \int_0^0 f(t)dt = 0$ temos que $f(0) = 0$. Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + C) = C$. Assim, $C = 0$, donde se conclui que $f(x) = x, \forall x \in [0, +\infty[$.