FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B e C)

2º Teste — 13 de Janeiro de 2010

1. (*4,5 val.*) Considere a função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2}, & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - e^{3x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

   (a) Indique os intervalos de monotonia e os extremos relativos de$f$.

   (b) Determine os sentidos de concavidade de f e os seus pontos de inflexão.

2. (*3 val.*) Calcule, justificando, o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \log(1+x) - x}{x^2}.$$

3. (*2,5 val.*) Considere a função real de variável real definida por $f(x) = e^x\,(x-5)$. Escreva a Fórmula de Taylor da função f em torno do ponto 0, com resto de Lagrange de ordem 3.

4. (*5 val.*) Calcule o valor dos seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_{\log(\frac{\pi}{4})}^{\log(\frac{\pi}{3})} \text{tg}(e^x)e^x dx;$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2(2x^2+2)} dx.$

5. (*2,5 val.*) Calcule a área do domínio plano limitado pelos gráficos das funções $f(x) = x^3 - x$ e

   $g(x) = 3x.$

6. (*2,5 val.*) Seja $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0; +\infty[$ e diferenciável em $]0; +\infty[$ que satisfaz $f(x) \neq 0, \forall x > 0$. Supondo que

$$(f(x))^2 = 2\int_0^x f(t)dt,$$

   mostre que $f(x) = x, \forall x \geq 0.$
   Sugestão: Calcule a derivada de ambos os membros da igualdade.