FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (D e E)

Repetição do 1º Teste — 27 de Janeiro de 2010

1. (*4 val.*) Considere o conjunto
$$X = ([-1,1] \cap \mathbb{Q}) \cup \{2\}.$$
   (a) Explicite o interior, a fronteira e a aderência de X.
   (b) O conjunto X é fechado? O conjunto $fr(X)$ é fechado? Justifique a sua resposta.
   (c) Indique, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de X. Justifique.

2. (*4,5 val.*) Calcule, justificando, os limites das seguintes sucessões:
   (a) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{8n^2-1}}{n\sqrt{n+\sin(n)}}$,
   (b) $b_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$,
   (c) $c_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3. (*4,5 val.*) Considere a sucessão definida por recorrência
$$x_0 = 0\,, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}\,.$$
   (a) Mostre, usando o Princípio de Indução Matemática, que $0 \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   (b) Mostre que a sucessão (x_n) é crescente.
   (c) Indique, justificando, o limite de (x_n).

4. (*4 val.*) Considere a função definida em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ por $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) Estude a existência de limites para f em $-\infty$, $+\infty$ e 0.
   (b) Indique, justificando, se f é prolongável por continuidade em 0.

5. (*3 val.*) Considere a função
$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\log(x)\right) + \frac{1}{4}, & \text{se } x \in]0,e], \\ \frac{1}{4}, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
   (a) Mostre que f tem máximo e mínimo no intervalo $[0,e]$.
   (b) Prove que existe $\exists c \in]0,e[$ tal que $f(c) = 0$.