Uma resolução do primeiro teste de Análise Matemática 1E

25/11/2009

Grupo 1 (4,5 val.)

(a) Pretendemos determinar o interior e a fronteira do conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 + x \leq 0\} .$$

Factorizando

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2 .$$

Concluímos que

$$x^3 - 2x^2 + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = 1 .$$

Posto que

$$(x-1)^2 > 0 \quad \text{para} \quad x \neq 1$$

Temos

$$x(x-1)^2 < 0 \quad \forall\, x \in]-\infty, 0[\qquad \text{e} \qquad x(x-1)^2 > 0 \quad \forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

Podemos pois concluir que

$$A =]-\infty, 0] \cup \{1\} .$$

Assim, temos

$$Int(A) =]-\infty, 0[\qquad \text{e} \qquad Fr(A) = \{0, 1\} .$$

(b) Podemos considerar como exemplo de conjunto ilimitado sem pontos interiores o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais (outros exemplos como $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ são admissíveis). O conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente pois dado um qualquer real M, existe um natural n tal que $n > M$ (por exemplo: $n = \lfloor M \rfloor + 1$). Este conjunto não contem pontos interiores posto que qualquer vizinhança de um número natural contem números não naturais.

(c) Consideramos o conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{2n+1} , \quad n \in \mathbb{N}\} .$$

Este conjunto é constituído pelos termos de uma sucessão estritamente decrescente, convergente para zero. Assim

$$0 \in Fr(B) \quad \text{e} \quad 0 \in B' \,.$$

Todos os elementos de B são pontos isolados, logo

$$B \subset Fr(B) \quad \text{e} \quad B \cap B' = \emptyset \,.$$

Finalmente, se $x \in \mathbb{R}\backslash(B \cup \{0\})$ então $x \in ext(B)$, não existindo por isso outros pontos fronteiros ou de acumulação para além dos determinados. Podemos então concluir

$$\overline{B} = B \cup \{0\} \quad \text{e} \quad B' = \{0\} \,.$$

Grupo 2 (3,5 val)-

(a) Estudamos a sucessão

$$u_1 = 3 \qquad u_{n+1} = 3 - \frac{2}{u_n} \,.$$

Verifiquemos por indução que

$$u_n \geq 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \,.$$

A afirmação é verdadeira para $n = 1$ posto que $u_1 \geq 2$ (base de indução). Admitindo a proposição verdadeira para $n \in \mathbb{N}$ procuremos demonstrar

$$u_{n+1} \geq 2 \qquad (\text{tese de indução}) \,.$$

Temos

$$u_n \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{u_n} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 3 - \frac{2}{u_n} \geq 2 \,,$$

ou seja

$$u_{n+1} \geq 2 \,,$$

como pretendíamos verificar. Assim, pelo princípio de indução, a desigualdade é verdadeira para todos naturais.

(b) Justifiquemos que (u_n) é decrescente. Recordando que, pela alinea anterior temos $u_n \geq 2$ (em particular, $u_n \neq 0$) deduzimos

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{2}{u_n} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n} = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 1)}{u_n} \,.$$

Posto que $u_n \geq 2$ temos

$$u_n > 0 \,, \quad (u_n - 2)(u_n - 1) \geq 0 \,,$$

o que implica

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \,,$$

como queríamos provar.

(Nota: demonstrações alternativas eram admissíveis, por exemplo: justificando por indução que $u_{n+1} \leq u_n$.)

(c) A sucessão (u_n) é monótona e limitada, logo converge para um limite que designaremos por l. Pela alinea (a), $l \geq 2$. Por outro lado, a subsucessão (u_{n+1}) também converge para l. A relação de recorrência impõe que l verifique a igualdade

$$l = 3 - \frac{2}{l} \quad \text{ou} \quad l^2 - 3l + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad (l-2)(l-1) = 0\,.$$

Concluímos que $l = 2$.

Grupo 3 (4,5 val.)

(a) Multiplicando e dividindo pela expressão conjugada:

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{n^2 + \sin(n)} - n\right)\left(\sqrt{n^2 + \sin(n)} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2 + \sin(n)} + n\right)},$$

ou

$$u_n = \frac{1}{\left(\sqrt{n^2 + \sin(n)} + n\right)}\,.$$

Posto que

$$\lim \sqrt{n^2 + \sin(n)} + n \geq \lim \sqrt{n^2 - 1} + n = +\infty$$

concluímos

$$u_n \to 0\,.$$

(b) Escrevemos

$$v_n = \left(\frac{n+1+2}{n+1}\right)^{2n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{2n+1} = \left(\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{2n+1}{n+1}}\,.$$

Posto que

$$\frac{2n+1}{n+1} \to 2 \quad \text{e} \quad \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1} \to e^2\,,$$

concluímos que

$$v_n \to e^4\,.$$

(c) Observe que o termo w_n verifica o seguinte enquadramento

$$\frac{n}{\sqrt{n^5 + n}} \leq w_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^5 + 1}} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Assim, posto que

$$0 \leq \lim \frac{n}{\sqrt{n^5 + n}} \leq \lim \frac{n}{\sqrt{n^5 + 1}} \leq \lim n^{-3/2} = 0\,,$$

concluímos, pelo lema das sucessões enquadradas, que $w_n \to 0$.

Grupo 4

(a) A função f está definida se

$$1 + \sin(t) > 0 \quad \text{ou} \quad \sin(t) > -1\,.$$

Assim,

$$D_f = \left\{ t \in \mathbb{R} : t \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}\,.$$

Dado que

$$0 < 1 + \sin(t) \leq 2 \quad \forall t \in D_f\,,$$

concluímos, pelo crescimento da função log em $]0, +\infty[$, que

$$f(t) \leq \log(2)\,.$$

Assim, f é majorada superiormente.

Temos também que $\log(2) = f(\frac{\pi}{2})$ pelo que este valor é de facto um máximo da função f. Tomando uma sucessão $t_n \to \frac{3\pi}{2}$ teremos

$$1 + \sin(t_n) \to 0^+\,,$$

logo

$$f(t_n) = \ln(1 + \sin(t_n)) \to -\infty\,.$$

A função f não é limitada inferiormente. Em particular não tem mínimo.

(b) (i) Dada a limitação da função seno,

$$\left| \frac{\sin(3x)}{2x} \right| \leq \frac{1}{|2x|}.$$

Assim

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0\,.$$

Estudemos agora o limite de h em $+\infty$. Simplificamos a expressão fraccionária dividindo em cima e em baixo por $x^{4/3}$:

$$h(x) = \frac{x\sqrt[6]{x^2+2}}{(x+1)\sqrt[3]{x+2}} = \frac{\sqrt[6]{1+2/x^2}}{(1+1/x)\sqrt[3]{1+2/x}}\,.$$

Sabendo que

$$\lim_{x\to\infty} 2/x^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} 2/x = 0$$

concluímos

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{1}{1} = 1\,.$$

(ii) Temos, de acordo com o limite notável $\sin(x)/x$ em zero,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \frac{3}{2}\,.$$

(iii) A existência de limite em zero (ou de limites laterais coincidentes) torna contínua em zero a função definida por

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 3/2 & \text{se } x = 0 \end{cases} ,$$

designada por prolongamento por continuidade de função g em zero.

Grupo 5 (2 val.) Começamos por observar que a função ϕ é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$. Em particular, ϕ verifica as condições do Teorema do Valor Intermédio em cada sub-intervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$. Consideremos as seguintes sucessões

$$x_n = \sqrt{2n\pi} \qquad y_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\,.$$

Ambas tendem para $+\infty$ e verifica-se que

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < \ldots.$$

Temos também, para todo o natural n

$$\phi(x_n) = 0 \quad \text{e} \quad \phi(y_n) = y_n\,.$$

Teremos pois, a partir de certa ordem p,

$$\phi(x_n) = 0 \quad \text{e} \quad \phi(y_n) > 3\,.$$

Aplicando o Teorema do Valor Intermediário sucessivamente nos intervalos

$$I_n := [x_n, y_n] \quad \text{com } n > p\,,$$

concluímos que, em cada $]x_n, y_n[$, existe pelo menos uma solução c_n para a equação

$$\phi(x) = 3\,.$$

As soluções c_n encontradas são diferentes entre si por pertencerem a conjuntos disjuntos. Logo são em número infinito.