FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (D e E)

1º Teste — 25 de Novembro de 2009

1. (*4,5 val.*)

   (a) Determine o interior e a fronteira do conjunto
   $$A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 + x \leq 0\}.$$

   (b) Dê um exemplo de um conjunto ilimitado sem pontos interiores.

   (c) Determine o derivado e a aderência do conjunto
   $$B = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

2. (*3,5 val.*) Considere a sucessão (u_n) definida por
   $$\begin{cases} u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$$

   (a) Mostre, por indução, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n$.

   (b) Mostre que a sucessão (u_n) é decrescente.

   (c) Justifque que (u_n) é convergente e calcule, justificando, o seu limite.

3. (*4,5 val.*) Calcule, justificando, os limites das seguintes sucessões:

   (a) $u_n = \sqrt{n^2 + \sin(n)} - n$;

   (b) $v_n = \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{2n+1}$;

   (c) $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^5 + k}}$.

4. (*5,5 val.*)

   (a) Determine o domínio da função $f(t) = \log(1 + \text{sen}(t))$. Mostre que a função f é majorada. Caso existam, indique o máximo e o mínimo de f.

   (b) Considere as funções reais de variável real definidas por:
   $$g(x) = \frac{\text{sen}(3x)}{2x} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \frac{x\sqrt[6]{x^2+2}}{(x+1)\sqrt[3]{x+2}}.$$

      i. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

      ii. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

      iii. Será g prolongável por continuidade no ponto $x_0 = 0$? Justifique.

5. (*2 val.*) Considere a função ϕ definida em $\mathbb{R}$ por $\phi(x) = x\sin(x^2)$. Mostre que a equação
   $$\phi(x) = 3$$
   possui uma infinidade de soluções.
   Sugestão: comece por determinar sucessões (x_n) e (y_n) de limite $+\infty$ tais que $\lim\limits_{n \to +\infty} \phi(x_n) = 0$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} \phi(y_n) = +\infty$.