Uma resolução do segundo teste de Análise Matemática 1E

13/01/2010

Grupo 1 (5 val.)

(a) Consideramos a função

$$f(x) = \begin{cases} mx + k, & \text{se } x \geq 0 \\ \ln(e + x^2) & \text{se} x \geq 0 \end{cases} .$$

Trata-se de uma função definida por ramos, diferenciável para $x < 0$ ou para $x > 0$. No ponto $x = 0$ podemos garantir a diferenciabilidade através do seguinte critério, corolário do Teorema do valor Médio de Lagrange:

(i) f é contínua em 0. Ou seja

$$k = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln(e) = 1 .$$

(ii) Existe $\lim_{x \to 0} f'(x)$. Ou seja

$$m = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{e + x^2} = 0 .$$

Concluímos que f é diferenciável para $k = 1$ e $m = 0$. Se $k \neq 1$ temos que f não é contínua (logo não diferenciável) em 0. Se $k = 1$ e $m \neq 0$ então f não é diferenciável em 0 por nesse ponto não coincidirem as derivadas laterais.

(b) A função $f(x) = \frac{1}{2}x + \sin(x)$ é diferenciável em $]0, \pi[$ e contínua em $[0, \pi]$. Logo atinge máximo e mínimo no intervalo fechado e os extremos relativos que pertençam ao interior do domínio são pontos estacionários. Temos

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) ,$$

pelo que

$$f'(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in \left] 0, \frac{2\pi}{3} \right[$$

e

$$f'(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in \left] \frac{2\pi}{3}, \pi \right[.$$

Assim f cresce estritamente no intervalo $[0, \frac{2\pi}{3}]$ e decresce estritamente no intervalo $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$, atingindo por isso um máximo absoluto no ponto $\frac{2\pi}{3}$. O ponto 0 e o ponto π são mínimos relativos. Dada o comportamento da função e o facto de $f(0) < f(\pi)$ deduzimos que f tem em zero um mínimo absoluto.

(c) Temos

$$g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x \,, \qquad g''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x \,.$$

O sinal da segunda derivada é determinado pelo sinal de $(x+2)$. Assim a concavidade de f está voltada para baixo se $x < -2$ e voltada para cima se $x > -2$. Concluímos que $x = -2$ é um ponto de inflexão da função g. (Alternativamente, o aluno podia indicar as coordenadas $(2, 2e^2)$ do ponto no gráfico de g em que ocorre a inflexão.)

Grupo 2 (5 val.)

(a) Consideramos a função $f(x) = \sin(2x)e^{3x}$. Trata-se de uma função que possui derivada de qualquer ordem no ponto $x = 0$. Utilizando o desenvolvimento

$$\sin(X) = X - \frac{X^3}{3!} + r_3(X)$$

e operando a substituição $X = 2x$ obtemos

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + r_3(2x)\,.$$

De modo semelhante, temos

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} + r_2(3x)\,.$$

Calculamos o polinómio de Taylor de ordem 3 de f por multiplicação dos polinómios de $\sin(2x)$ e de e^{3x}.

$$f(x) = (2x - (2x)^3/6 + r_3(2x))(1 + 3x + (3x)^2/2 + r_2(3x))$$

ou

$$f(x) = 2x + 6x^2 + 9\,x^3 - 4/3\,x^3 + r_3(x) = 2x + 6x^2 + 23/3, x^3 + r_3(x)$$

em que $\lim_{x\to 0} r_3(x)/x^3 = 0$. Posto que f possui quarta derivada em $\mathbb{R}$, podemos escrever

$$r_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4$$

em que c é um valor intermediário entre 0 e x.

(Alternativamente, o aluno poderia ter resolvido esta questão derivando sucessivamente a função f).

(b) Utilizando a alinea anterior, escrevemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)e^{3x} - 2x - 6x^2}{\sin(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{23/3\,x^3 + r_3(x)}{\sin(x^3)} = L\,.$$

Dividindo por x^3 numerador e denominador, obtemos

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{19/6 + r_3(x)/x^3}{\sin(x^3)/x^3} = 23/3,$$

posto que

$$\lim_{x\to 0} r_3(x)/x^3 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \sin(x^3)/x^3 = 1\,.$$

(Alternativamente, o aluno poderia ter resolvido esta questão usando sucessivamente a regra de Cauchy.)

Grupo 3 (5 val.)

(a)

$$\int_0^2 \frac{1+x}{1+4x^2}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{1+4x^2}\,dx + \int_0^2 \frac{x}{1+4x^2}\,dx =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2}{1+(2x)^2}\,dx + \frac{1}{8}\int_0^2 \frac{8x}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}[\arctan(2x)]_0^2 + \frac{1}{8}[\ln(1+4x^2)]_0^2 =$$
$$\frac{1}{2}\arctan(4) + \frac{1}{8}\ln(17)\,.$$

(b) Note que da relação $t = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ concluímos

$$x = t^2 \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = 2t\,.$$

Assim

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x})\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\frac{dx}{dt}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)2t\,dt$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)2t\,dt = [\sin(t)2t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(t)\,dt = \pi - [-2\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2\,.$$

Grupo 4 (3 val.)

Começamos por resolver

$$\tan(x) = 2\sin(x) \qquad x \in]0\,,\,\frac{\pi}{2}[$$

ou

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 2\sin(x) \qquad x \in]0\,,\,\frac{\pi}{2}[\,.$$

Concluímos $x = 0$ ou

$$\cos(x) = \frac{1}{2}$$

obtendo por isso duas outras soluções, $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = -\frac{\pi}{3}$. A área A da região delimitada pelos gráficos de g e $2\sin(x)$ é-nos dada por

$$A = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \tan(x) - 2\sin(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin(x) - \tan(x)\,dx\,.$$

Calculemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin(x) - \tan(x)\, dx = [-2\cos(x) + \ln(|\cos(x)|)]_0^{\frac{\pi}{3}} = 1 - \ln(2).$$

De modo semelhante, deduzimos

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \tan(x) - 2\sin(x)\, dx = 1 - \ln(2)\,.$$

Assim

$$A = 2 - 2\ln(2)\,.$$

Grupo 5 (2,5 val.)

A função g é diferenciável em $\mathbb{R}$ por ser a composta da função $\sin(x)$ (diferenciável em $\mathbb{R}$) com a função

$$F(y) = \int_0^y e^{-t^2}\, dt\,,$$

que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, é diferenciável em $\mathbb{R}$ com derivada

$$F'(y) = e^{-y^2}\,.$$

Pela regra da derivação composta, teremos então, para $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = F'(g(x))g'(x) = e^{-\sin^2(x)}\cos(x)\,.$$