Primeiro Teste de Análise Matemática I E

24 de Outubro de 2012

Nota: Esta é apenas uma resolução de entre muitas outras possíveis.

Questão 1:

a) Comecemos por elaborar um quadro que represente a variação de sinal da expressão $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$:

		1		2		3	
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)(x-3)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$	$-$	0	$+$	ND	$-$	ND	$+$

Assim

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]2,3[$$

b) A sucessão é definida por

$$1+\frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} 1-\frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1+\frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

pelo que todos os termos correspondentes a n ímpar pertencem ao conjunto A.

Assim,

$$A \cup B =]-\infty, 1[\cup]2,3[\cup \{1 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}\}$$

Desta forma,

$$fr(A \cup B) = \{1,2,3\} \cup \{1 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}\}.$$

c) Um conjunto diz-se aberto se for igual ao seu interior e fechado se for igual à sua aderência.

$int(B \cup \{2\}) = \emptyset \neq B \cup \{2\}$ logo $B \cup \{2\}$ não é aberto

$fr(B \cup \{2\}) = B \cup \{2,1\}$

$\overline{B \cup \{2\}} = int(B \cup \{2\}) \cup fr(B \cup \{2\}) = B \cup \{2,1\} \neq B \cup \{2\}$ logo $B \cup \{2\}$ não é fechado

d) As afirmações i e ii são verdadeiras.

A afirmação iii é falsa. Para tal, basta considerar

$X = [0,1]$. Temos $fr(X) = \{0,1\}$ e $X' = [0,1]$.

Logo $X' \cap fr(X) = \{0,1\} \neq \emptyset$.

Questão 2

a)

$$\lim\left(\frac{4n-3}{4n+1}\right)^n = \lim \frac{\left(1-\frac{3}{4n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{4n}\right)^n} =$$

$$= \lim \frac{\left[\left(1-\frac{3}{4n}\right)^{4n}\right]^{1/4}}{\left[\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}\right]^{1/4}} = \frac{e^{-3/4}}{e^{1/4}} = e^{-1}$$

b) Começamos por determinar

$$\lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \lim \frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$$

logo a sucessão $\sqrt{n^2+1}-n$ é um infinitésimo.

Sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \cos^2(2n+1) \leq 1$, pelo que $\cos^2(2n+1)$ é uma sucessão limitada.

Como o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo, podemos concluir que $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cos^2(2n+1) = 0$.

e)

Comecemos por enquadrar a sucessão

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \times (n+1) \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} (n+1), \forall n \in \mathbb{N}$$

Como

$$\lim \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}} = \lim \frac{1+1/n}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = 1$$

e

$$\lim \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{1+1/n}{\sqrt{1+1/n}} = 1,$$

o Teorema das Sucessões Enquadradas garante que

$$\lim \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 1.$$

Questão 3

a) Começamos por mostrar que a proposição é verdadeira para o primeiro dos números naturais.

$$u_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} = 1 \leq 1 = 2 - \frac{1}{1}$$

Mostremos agora que se a proposição for verdadeira para um certo número natural n, também é verdadeira para o natural seguinte $(n+1)$.

Para tal definamos uma hipótese e uma tese.

Hipótese: $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

Tese: $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$

Prova da tese:

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

pela hipótese

Se $-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{n+1}$ então temos o resultado pretendido.

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow -\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{-n^2} - \cancel{2n} - 1 + \cancel{n} + \cancel{n^2} + \cancel{n}}{n(n+1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0$$ que se

verifica pois $n \in \mathbb{N}$.

Assim, pelo Princípio de Indução Matemática,

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

b)

Pela alínea anterior sabemos que

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim

$$0 \leq \sqrt[n]{\frac{u_n}{n!}} \leq \sqrt[n]{\frac{2-\frac{1}{n}}{n!}}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

$$\lim \frac{\frac{2-\frac{1}{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2-\frac{1}{n}}{n!}} = \lim \frac{2-\frac{1}{n+1}}{2-\frac{1}{n}} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{2-\frac{1}{n+1}}{2-\frac{1}{n}} \frac{1}{n+1} =$$

$$= \frac{2}{2} \times 0 = 0$$

Como

$\frac{2-\frac{1}{n}}{n!} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ podemos concluir que

$$\lim \sqrt[n]{\frac{2-\frac{1}{n}}{n!}} = 0.$$

Atendendo a $(*)$, o Teorema das Sucessões Enquadradas permite-nos concluir que

$$\lim \sqrt[n]{\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}{n!}} = 0.$$