ANÁLISE MATEMÁTICA II E

Exame de época normal – Respostas

19 de Junho de 2009

1. a) $2xyy' = 1 + y^2$

$$\frac{2y}{1+y^2}\, y' = \frac{1}{x}$$

$$\log(1+y^2) = \log|x| + C$$

$$1 + y^2 = Cx$$

$$y(x) = \pm\sqrt{Cx - 1}$$

$$y(\sqrt{2}) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}C - 1 = 1 \Leftrightarrow C = \sqrt{2}$$

A solução do problema de valores iniciais é $y(x) = \sqrt{\sqrt{2}x - 1}$

b) Resolução da equação homogénea associada $y' = \dfrac{x-1}{x}\, y$:

$$\frac{y'}{y} = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\log y = x - \log|x| + C$$

$$Y_H = C\,\frac{e^x}{x}$$

$$y(x) = C(x)\,\frac{e^x}{x}$$

$$y'(x) = C'\,\frac{e^x}{x} + C\,\frac{xe^x - x}{x^2}$$

Substituindo na equação:

$$C'e^x + Ce^x - C\,\frac{e^x}{x} + (1-x)\,C\,\frac{e^x}{x} = e^{2x}$$

$$C'e^x = e^{2x}$$

$$C'(x) = e^x$$

$$C(x) = e^x + C$$

A solução geral da equação é $y(x) = C\,\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{e^{2x}}{x}$.

$y(1) = -e^2 \Leftrightarrow Ce + e^2 = -e^2 \Leftrightarrow Ce = -2e^2 \Leftrightarrow C = -2e$.

A solução do problema de valores iniciais é $y(x) = -2e\,\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{e^{2x}}{x} = \dfrac{e^{2x} - 2e^{x+1}}{x}$

2. a) f é contínua em todos os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ pelas propriedades operatórias da continuidade uma vez que se trata de um subconjunto aberto do domínio; estudemos a continuidade em $(0, 0)$:

$|f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)| = \left|\dfrac{r^2\cos^2\theta}{r}\right| = |r\cos^2\theta| \le r \longrightarrow 0$ quando $r \to 0$, uniformemente em θ; logo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, e portanto f também é contínua em $(0,0)$.

Assim, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h^2/\sqrt{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h^2}{h|h|} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{|h|}$

Este limite não existe, visto que

$\lim_{h\to 0^-} \dfrac{h}{|h|} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{-h} = -1$, e $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{h}{|h|} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{h} = 1$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \dfrac{0-0}{k} = 0$.

c) Como não existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, conclui-se imediatamente que f não é diferenciável em $(0,0)$.

3. $(x,y,z) \longrightarrow (u,v) = (\sin x, \log(x^2+y)+y^2 z) \longrightarrow g(u,v) = f(x,y,z)$

$P_0(0,1,1) \longrightarrow (u_0,v_0) = (\sin 0, \log(0^2+1)+1^2\times 1) = (0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,1) = \frac{\partial g}{\partial u}(0,1)\frac{\partial u}{\partial x}(0,1,1) + \frac{\partial g}{\partial v}(0,1)\frac{\partial v}{\partial x}(0,1,1) =$$
$$= \frac{\partial g}{\partial u}(0,1)\cos x_{|(0,1,1)} + \frac{\partial g}{\partial v}(0,1)\frac{2x}{x^2+y}_{|(0,1,1)} = \frac{\partial g}{\partial u}(0,1);$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,1) = \frac{\partial g}{\partial u}(0,1)\frac{\partial u}{\partial y}(0,1,1) + \frac{\partial g}{\partial v}(0,1)\frac{\partial v}{\partial y}(0,1,1) =$$
$$= \frac{\partial g}{\partial u}(0,1)\times 0 + \frac{\partial g}{\partial v}(0,1)\left(\frac{1}{x^2+y} + 2yz\right)_{|(0,1,1)} = 3\,\frac{\partial g}{\partial v}(0,1);$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,1) = \frac{\partial g}{\partial u}(0,1)\frac{\partial u}{\partial z}(0,1,1) + \frac{\partial g}{\partial v}(0,1)\frac{\partial v}{\partial z}(0,1,1) =$$
$$= \frac{\partial g}{\partial u}(0,1)\times 0 + \frac{\partial g}{\partial v}(0,1)\times y^2_{|(0,1,1)} = \frac{\partial g}{\partial v}(0,1).$$

Conclusão: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(P) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(P) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(0,1) + 4\dfrac{\partial g}{\partial v}(0,1)$

4. a) $z = 3x^2 + y^2$: parabolóide elíptico.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2) = 6$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2) = -4$

Equação do plano tangente no ponto $(1,-2,7)$: $z-7 = 6(x-1) - 4(y+2)$, ou $6x - 4y - z = 7$; recta normal:

$$\begin{cases} x = 1+6t \\ y = -2-4t \\ z = 7-t \end{cases}$$

b) Sabe-se que em cada ponto a direcção em que o valor da derivada direccional de f é máximo é a direcção do vector gradiente de f nesse ponto, sendo esse valor (da derivada direccional segundo essa direccção) igual a $\|\nabla f\| = \sqrt{(6x)^2 + (2y)^2}$. Assim, o problema é calcular o máximo da função $\sqrt{36x^2 + 4y^2}$ - ou, o que é equivalente, do seu quadrado - sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$. Este problema resolve-se utilizando um multiplicador de Lagrange:

$$\begin{cases} 72x = \lambda 2x \\ 8y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$x \neq 0 \Rightarrow \lambda = 36$; $y \neq 0 \Rightarrow \lambda = 4$, logo não é possível $x \neq 0 \wedge y \neq 0$, e assim as únicas soluções são os pontos tais que $x = 0 \vee y = 0$, ou seja $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$; destes, os pontos de máximo da função são $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Conclusão: os pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ em que a derivada direccional de f tem o valor máximo são $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, e as respectivas direcções são $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

Pergunta alternativa: os pontos solução do sistema são: $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(-1/2, \sqrt{3}/2)$, $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$; o mínimo é 0, atingido no ponto $(1, 0)$, e o máximo é $9/4$, atingido nos pontos $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ e $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$.

5. Pontos críticos: $(2, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$. $(2, 0)$ e $(-1, 0)$ são pontos de mínimo local; $(0, 0)$ é ponto sela.

6. $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\log x} x\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{e^y}^e x\, dx\, dy = \frac{e^2 + 1}{4}$

7. $\displaystyle\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2a\cos\theta} r^2\, dr\, d\theta = \frac{16}{9} a^3$

8. Utilizando coordenadas cilíndricas para o cálculo do integral, tem-se que a linha de intersecção das duas superfícies indicadas é a circunferência $r = \sqrt[4]{2}$, $z = 2 - \sqrt{2}$. Assim, o volume é dado por

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt[4]{2}} \int_{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{9 - 4r^2}}{2}}^{2 - r^2} r\, dz\, dr\, d\theta = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{4} - \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} \right) \pi$$