Análise Matemática II E

Exame de época normal - 19 de Junho de 2009

Duração: 3 horas.

Deve mudar de folha sempre que mudar de pergunta. Deve apresentar os seus cálculos, argumentos e justificações. Atenção, existem mais perguntas no verso desta folha.

1. Resolva os seguintes problemas de valores iniciais:

   a) $2xyy' = 1 + y^2, \qquad y(\sqrt{2}) = 1$ [1,5]

   b) $xy' + (1-x)y = e^{2x}, \qquad y(1) = -e^2$ [1,5]

   c) Relativamente ao problema de valores iniciais da alínea a), obtenha um valor aproximado de $y(\sqrt{2} + 0,1)$, utilizando o método de Euler com passo $h = 0,1$).
   (Considere o valor $0,7$ como aproximação de $1/\sqrt{2}$) [1]

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$. [1]

   b) Calcule (caso existam) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. [1]

   c) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$. [1]

3. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, e seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y,z) = g(\sin x,\ \log(x^2+y) + y^2 z).$$

   Com $P = (0,1,1)$, determine a expressão de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(P) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(P)$.
   . [1,5]

v.s.f.f.

4. Considere a função $f(x, y) = 3x^2 + y^2$.

   a) O gráfico de f é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Classifique-a, e determine o plano tangente a essa superfície no ponto $(1, -2, 7)$. [1]

   b) Determine os pontos (x, y) e as direcções em que a derivada direccional de f tem o valor máximo, considerando f restringida à circunferência $x^2 + y^2 = 1$. [2,5]
   Observação: Caso não consiga resolver a alínea b), determine o máximo e o mínimo de $\phi(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. [1,5]

5. Determine os pontos críticos, e verifique se são máximos ou mínimos relativos ou pontos sela, da função

$$f(x, y) = y^2 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 24.$$

[1,5]

6. Troque a ordem de integração no seguinte integral

$$\int_1^e \int_0^{\log x} x \, dydx,$$

e calcule-o. [2]

7. Use coordenadas polares para calcular o seguinte integral:

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dydx.$$

[2]

8. Calcule o volume do sólido limitado inferiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 3z = 0$ e superiormente pelo parabolóide $2 - z = x^2 + y^2$. [2,5]