Análise Matemática II E

Exame de recurso - 10 de Julho de 2009

Duração: 3 horas.

Deve mudar de folha sempre que mudar de pergunta. Deve apresentar os seus cálculos, argumentos e justificações. Atenção, existem mais perguntas no verso desta folha.

1. Considere a equação logística $y' = 50y - 0,05y^2$.

   a) Indique a capacidade de suporte. [0,2]

   b) Determine as soluções de equilíbrio. [0,3]

   c) Determine a solução geral.
   (Observação: note que $\frac{L}{y(L-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{L-y}$*).* [1]

2. Considere o problema de valores iniciais

$$x(x+1)y' + y = x(x+1)^2 e^{-x^2}, \qquad y(1) = 0.$$

   a) Calcule a solução exacta do problema. [1,5]

   b) Obtenha um valor aproximado da solução no ponto $x = 1,1$ utilizando o método de Euler com passo $h = 0,1$.
   (Considere o valor $0,37$ *como aproximação de* $1/e$*)* [1]

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2 - xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$. [1]

   b) Calcule (caso existam) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. [1]

   c) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$. [1]

(v.s.f.f.)

4. Considere a curva em $\mathbb{R}^3$ definida parametricamente por
   $\mathbf{u}(t) = (t, t^2, t^3)$.

   a) Determine a recta tangente à curva num ponto genérico. [1]

   b) Determine os pontos da curva em que a recta tangente é paralela ao plano $x + 2y + z = 4$. [0,5]

5. Considere a superfície definida por $x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z = 0$.

   a) Determine o plano tangente à superfície no ponto $(1, 2, -1)$. [1]

   b) Calcule $D_{\mathbf{u}}z(1, 2)$, com $\mathbf{u} = (3, -4)$. [1]

   c) Indique a direcção em que z decresce mais rapidamente a partir do ponto $(1, 2, -1)$. [0,5]

6. a) Determine os pontos críticos, e verifique se são máximos ou mínimos relativos ou pontos sela, da função
   $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$. [1,5]

   b) Calcule os extremos da função $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ sujeita à condição $x - y = \pi/4$. [1,5]
   (Recorde que $2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin(2\alpha)$*)*

7. Troque a ordem de integração no seguinte integral

$$\int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\, dydx + \int_2^4 \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\, dydx$$

   e calcule-o. [2]

8. a) Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $z = 4 - x^2$ e os planos $y = 6$, $y = 0$ e $z = 0$. [1,5]

   b) Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin\theta} \int_0^{r^2} r \cos\theta \, dz\, dr\, d\theta$ (em que $(r,\ \theta,\ z)$ são as coordenadas cilíndricas). [1]

   c) Converta o integral da alínea b) para coordenadas cartesianas. [1,5]