Análise Matemática II E

Exame de época normal - 20 de Janeiro de 2010

Respostas

1. a) $y(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2}\right)$ b) $y(x) = \dfrac{1}{x} - 2$ c) $y(1,1) \approx -1,1$

2. a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.
b) Nos pontos do domínio que não pertencem à curva $y = -\sqrt{x}$, f é contínua, pelas propriedades operatórias da continuidade, visto que se trata de um subconjunto aberto do domínio; nos pontos (x_0, y_0) da curva temos de estudar a existência de limite: seja então (x_0, y_0) um ponto da curva, isto é, $y_0 = -\sqrt{x_0}$. Se $x_0 \neq 0$, tem-se:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y\neq-\sqrt{x}}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^{3/2} - xy}{x^{3/2} + y^3} = \infty,$$

e portanto f não é contínua nesses pontos. Se $x_0 = 0$, obtém-se o ponto $(0,0)$, no qual o limite anterior conduz a uma indeterminação de tipo $\frac{0}{0}$, que podemos levantar recorrendo por exemplo aos limites direccionais:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{3/2} - mx^2}{x^{3/2} + m^3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{3/2}(1 - m\sqrt{x})}{x^{3/2}(1 + m^3x^{3/2})} = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

Conclui-se assim que f também não é contínua em $(0,0)$, ou seja, em conclusão, f é contínua em $\{(x,y) \in D_f : y \neq -\sqrt{x}\}$.
c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Assim, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ não existe, e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
d) Como f não é contínua em $(0,0)$, não é diferenciável nesse ponto. *(No caso de não ter conseguido estudar a continuidade, também poderia concluir pela inexistência da derivada parcial* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$*).*

3. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}(-yz) + \dfrac{\partial f}{\partial v}\,2y$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-yz\frac{\partial f}{\partial u} + 2y\frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$

$$= -y\,\frac{\partial f}{\partial u} - yz\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\,\frac{\partial v}{\partial z}\right) + 2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,\frac{\partial v}{\partial z}\right) =$$

$$= -y\,\frac{\partial f}{\partial u} - yz\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,(-xy) + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\,2z\right) + 2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\,(-xy) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,2z\right)$$

$(x, y, z) = (1, -1, -2) \Rightarrow (u, v) = (-2, 2)$; atendendo aos valores dados no enunciado, obtém-se

$\dfrac{\partial w}{\partial x}(1, -1, -2) = 4, \qquad \dfrac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}(1, -1, -2) = -13.$

4. A direcção de declive máximo é a direcção do vector gradiente $\nabla z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$. Atendendo à regra de derivação das funções definidas implicitamente, obtém-se

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{(z+1)e^z}{xe^z + x(z+1)e^z}, \ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{-1}{xe^z + x(z+1)e^z}$, e assim

$\nabla z(1, 1, 0) = -\dfrac{1}{2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{2}\mathbf{j}.$

5. $S_1 :\ (x-c)^2 + y^2 + z^2 = 3;\ S_2 :\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$

a) $\nabla_1(x, y, z) = 2(x-c)\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$; $\nabla_2(x, y, z) = 2x\,\mathbf{i} + 2(y-1)\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$

Plano tangente a S_1 no seu ponto genérico (x_0, y_0, z_0):

$2(x_0 - c)(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$

Plano tangente a S_2 no seu ponto genérico (x_0, y_0, z_0):

$2x_0(x - x_0) + 2(y_0 - 1)(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0.$

b) Os vectores perpendiculares aos planos tangentes às esferas são respectivamente $(x_0 - c)\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$ e $x_0\,\mathbf{i} + (y_0 - 1)\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$. Os planos serão perpendiculares se esses dois vectores o forem, ou seja se $(x_0 - c)x_0 + y_0(y_0 - 1) + z_0^2 = 0$. Obtém-se assim o sistema

$$\begin{cases} (x_0 - c)^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3 & (S_1) \\ x_0^2 + (y_0 - 1)^2 + z_0^2 = 1 & (S_2) \\ (x_0 - c)x_0 + y_0(y_0 - 1) + z_0^2 = 0 & (\perp), \end{cases}$$

que apenas interessa resolver parcialmente, uma vez que só são pedidos os valores de c. Substituindo na equação $(\perp)$ o valor de z_0^2 obtido a partir de (S_2) e simplificando, obtém-se $y_0 = c\,x_0$;

substituindo este valor de y_0 e o valor de z_0^2 já anteriormente obtido na equação (S_1) e simplificando, obtém-se finalmente $c^2 = 3$, e portanto $c = \pm\sqrt{3}$, que são os valores pedidos.

6. a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - \dfrac{1}{2(x+y)}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - \dfrac{1}{2(x+y)}$. Para resolver o sistema de estacionaridade notemos que $x = y$, $4x = \dfrac{1}{2x}$, $x^2 = \dfrac{1}{8}$, logo as soluções são $x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{8}}$; como $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{8}}, -\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right) \notin D_f$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{8}}, \dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)$ é o único ponto de estacionaridade. Aplicando o critério da 2ª derivada, conclui-se que é um ponto de mínimo local.

b) Pretende-se calcular os extremos da função distância entre os pontos de duas curvas planas:
$d((x,y),(u,v)) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$. Como habitualmente, podemos então considerar $f(x,y,u,v) = d^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2$. As restrições são as equações das duas curvas:
$g_1(x,y,u,v) = x^2/4 + y^2 - 1$, $g_2(x,y,u,v) = u + v - 4$. A partir dos gradientes de f, g_1 e g_2 obtemos o sistema dos multiplicadores de Lagrange (neste caso são 2, visto que há duas restrições):

$$\begin{cases} (x-u) = \lambda\, x/2 \\ 2(y-v) = \lambda\, 2y \\ -2(x-u) = \mu \\ -2(y-v) = \mu \\ x^2/4 + y^2 = 1 \\ u + v - 4 = 0 \end{cases}$$

Eliminando λ e μ obtém-se $4y = x$, que, substituído na equação da elipse (uma vez que o que se pede são os pontos da elipse mais [...]), nos dá como soluções $P_1 = \left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ - ponto da elipse mais próximo da recta, e $P_2 = \left(-\dfrac{4}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ - ponto da elipse mais afastado da recta.

7. a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \int_{\frac{3}{\sin\theta}}^{6\sin\theta} r^2 \cos\theta \, d\,r d\,\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos\theta \left(72\sin^3\theta - \frac{9}{\sin^3\theta}\right) d\,\theta =$

$= 18\sin^4\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \dfrac{9}{2\sin^2(2\pi/3)} - 18\sin^4\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{9}{2\sin^2(\pi/4)} = \dfrac{21}{8}$

b) $\displaystyle\int_3^{4,5}\int_{-y/\sqrt{3}}^{\sqrt{9-(y-3)^2}} x\,d\,x\,d\,y + \int_{4,5}^{6}\int_{-\sqrt{9-(y-3)^2}}^{\sqrt{9-(y-3)^2}} x\,d\,x\,d\,y.$

8. $\displaystyle\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2+y^2)$

Atendendo a que o jacobiano de (x,y) em ordem a (u,v) é o inverso aritmético do jacobiano de (u,v) em ordem a (x,y), obtemos

$\displaystyle\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2(x^2+y^2}.$

$x^2-y^2=1 \Rightarrow u=1$, $x^2-y^2=9 \Rightarrow u=9$, $xy=2 \Rightarrow v=2$ e $xy=4 \Rightarrow v=4$. Assim

$\displaystyle\int\int_A (x^2+y^2)\,d\,x\,d\,y = \int_1^9\int_2^4 (x^2+y^2)\frac{1}{2(x^2+y^2)}\,d\,u\,d\,v =$

$\displaystyle= \int_1^9\int_2^4 \frac{1}{2}\,d\,u\,d\,v = 8.$

9. a) S_1 é um parabolóide circular e S_2 é um cilindro circular vertical de raio a.

b) Atendendo às superfícies que limitam o sólido, a forma mais simples de calcular o volume pedido é utilizando as coordenadas cilíndricas:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{r^2} r\,d\,z\,d\,r\,d\,\theta = \frac{\pi}{2}a^4$$