Análise Matemática II E

Exame de época normal - 20 de Janeiro de 2010

Duração: 3 horas.

Deve mudar de folha sempre que mudar de pergunta. Deve apresentar os seus cálculos, argumentos e justificações. Atenção, existem mais perguntas no verso desta folha.

1. Resolva os seguintes problemas de valores iniciais:

   a) $x^3 y' \sin y = 2, \qquad y(-1) = \frac{\pi}{3}$ [1,5]

   b) $(2x-1)y' - 2y = \frac{(2x-1)^2}{x^2}, \qquad y(1) = -1$ [1,5]

   c) Relativamente ao problema de valores iniciais da alínea b), obtenha um valor aproximado de $y(1,1)$, utilizando o método de Euler com passo $h = 0,1$. [1]

2. Considere a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{3/2} - xy}{x^{3/2} + y^3} & se \;\; y \neq -\sqrt{x} \\ \\ 0 \;\; se \;\; y = -\sqrt{x} \end{cases}$$

   a) Determine o domínio de f. [0,5]

   b) Estude a continuidade de f. [1]

   c) Calcule (caso existam) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. [0,5]

   d) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$. [1]

3. Considere a função $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $w = f(u,v)$, em que $u = -xyz, \;\; v = 2xy + z^2$, e f é uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$, para a qual se tem $\dfrac{\partial f}{\partial u}(-2,2) = -3, \;\; \dfrac{\partial f}{\partial v}(-2,2) = 1,$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(-2,2) = 4, \;\; \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(-2,2) = -1, \;\; \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}(-2,2) = \dfrac{1}{2}.$
Determine $\dfrac{\partial w}{\partial x}(1,-1,-2)$ *e* $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}(1,-1,-2)$. [1]

v.s.f.f.

4. Considere a superfície definida por $x(z+1)e^z - y = 0$. Determine a direcção de declive máximo da superfície no ponto $(1,1,0)$. [1,5]

5. Seja S_1 a esfera de centro no ponto $(c,0,0)$ (em que $c \in \mathbb{R}$) e raio $\sqrt{3}$ e S_2 a esfera de centro no ponto $(0,1,0)$ e raio 1.

   a) Determine os planos tangentes a cada uma das esferas (no seu ponto genérico). [1]

   b) Calcule os valores da constante c de modo que as duas esferas se intersectem, e em todos os pontos de intersecção os planos tangentes sejam perpendiculares. [1]

6. a) Determine os pontos críticos, e verifique se são máximos ou mínimos relativos ou pontos sela, da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - \log\sqrt{x+y}$. [1]

   b) Determine os pontos da elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ que estão mais próximo e mais afastado da recta $x + y = 4$. [1,5]

7. a) Calcule $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \int_{\frac{3}{\sin\theta}}^{6\sin\theta} r^2 \cos\theta \, d\,r\,d\,\theta$. [1]

   b) Converta o integral em coordenadas cartesianas. [1]

8. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ a região do 1º quadrante compreendida entre as hipérboles de equações $x^2 - y^2 = 1,\ x^2 - y^2 = 9,\ xy = 2$ e $xy = 4$. Calcule o integral $\displaystyle\int\int_A (x^2 + y^2)\, d\,x\,d\,y$, utilizando a mudança de variáveis $u = x^2 - y^2,\ v = xy$. [2]

9. Considere as superfícies S_1 e S_2 definidas respectivamente pelas equações $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 = a^2$ (em que a é uma constante).

   a) Classifique as superfícies. [0,5]

   b) Calcule o volume do sólido limitado pelas duas superfícies e o plano xy. [1,5]