Análise Matemática II E

Exame de recurso - 10 de Fevereiro de 2010

Duração: 3 horas.

Deve mudar de folha sempre que mudar de pergunta. Deve apresentar os seus cálculos, argumentos e justificações. Atenção, existem mais perguntas no verso desta folha.

1. Considere a equação diferencial $y' = \tan y$.
   a) Determine as soluções constantes. [0,5]
   b) Determine a solução da equação que verifica a condição inicial $y\,(0) = \frac{\pi}{6}$. [1,5]

2. Considere o problema de valores iniciais $2xy' + y = e^{\sqrt{x}}, \quad y(1) = e - 1$
   a) Obtenha a solução deste problema. [1,5]
   b) Obtenha um valor aproximado de $y(1,2)$, utilizando o método de Euler com passo $h = 0,2$. [0,5]

3. Considere a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 + y^3}{x^2 + y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Estude a continuidade de f. [1]
   b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. [0,5]
   c) Mostre que $\nabla f\,(1,0)$ e $\nabla f\,(0,1)$ são vectores ortogonais. [1]
   d) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$. [1]

4. a) Determine a equação da recta tangente à curva definida por $\mathbf{u}\,(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \log(1+t)\,\mathbf{k}$ no ponto $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \log(1 + \frac{2\pi}{3})$. [1]
   b) Verifique se existe algum ponto da curva em que a tangente seja perpendicular à curva. [1]

5. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (de variáveis (u,v)) uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$, e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \varphi(x+y,\ xy)$. e f é uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.

   a) Calcule as derivadas parciais de segunda ordem da função f, e verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) - \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(2,1)$. [1,5]

   b) Sabendo adicionalmente que $-\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(2,1) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(2,1) = 1$ e que as derivadas parciais de segunda ordem de φ são não negativas, mostre que o ponto $(1,1)$ é ponto de estacionaridade de f, e verifique se é um ponto séla, ou ponto de máximo ou de mínimo local.
   Observação: Caso não tenha resolvido a alínea a), admita que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) \geq 0$ [1,5]

6. Calcule os extremos da função $f(x,y) = xy + 2y$ sujeita à condição $x^2 + 2y^2 = 4$. [2]

7. Troque a ordem de integração e calcule o seguinte integral:
$$\int_{1/2}^{1} \int_{1}^{2y} \frac{\log x}{x}\, d\,x\, d\,y + \int_{1}^{2} \int_{y}^{2} \frac{\log x}{x}\, d\,x\, d\,y$$ [2]

8. Considere o integral $\displaystyle\int\int_A e^{xy}\, d\,x\, d\,y$, em que $A \subset \mathbb{R}^2$ é a região do 1º quadrante limitada pelas rectas $y = \dfrac{x}{2}$, $y = x$ e pelas hipérboles $xy = 1,\ xy = 2$.

   a) Escreva o integral na forma de um integral iterado. [0,5]

   b) Calcule o integral utilizando a mudança de variáveis $u = \dfrac{y}{x},\ v = xy$. [1,5]

9. Converta o seguinte integral em coordenadas esféricas:
$$\int_{0}^{\sqrt{27}/2} \int_{0}^{2\pi} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}z}^{\sqrt{9-z^2}} 2rz\, d\,r\, d\,\theta\, d\,z$$ $[1,5]$