2. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(\cos x - \sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudo da continuidade de f em $(0,0)$:
Cálculo dos limites direccionais utilizando coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta \, r\sin\theta \left(\cos(r\cos\theta) - \sin(r\sin\theta)\right)}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta\left(\cos(r\cos\theta) - \sin(r\sin\theta)\right) = 0$$

Como $\left| r\cos\theta\sin\theta\left(\cos(r\cos\theta) - \sin(r\sin\theta)\right)\right| =$

$$= r\,|\cos\theta|\,|\sin\theta|\,|\cos(r\cos\theta) - \sin(r\sin\theta)| \leq$$

$$\leq r\left(|\cos(r\cos\theta)| + |\sin(r\sin\theta)|\right) \leq 2r \xrightarrow[r\to 0]{} 0,$$

f é contínua no ponto $(0,0)$, e portanto contínua em $\mathbb{R}^2$.

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{|h|} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

c) $$\frac{f(h,k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \frac{\frac{hk(\cos h - \sin k)}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk(\cos h - \sin k)}{h^2+k^2}$$

Cálculo dos limites direccionais em $(h,k)=(0,0)$ desta expressão, utilizando coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta \, r\sin\theta \left(\cos(r\cos\theta) - \sin(r\sin\theta)\right)}{r^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta\left(\cos(r\cos\theta) - \sin(r\sin\theta)\right)}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$$

Os limites direccionais dependem de θ, portanto não existe o limite da expressão acima no ponto $(h,k)=(0,0)$, o que permite concluir que f não é diferenciável em $(0,0)$.

3. $z(x,y) = xy + f(x^2+y^2, xy)$

a) Se considerarmos as variáveis intermédias $u = x^2+y^2$, $v = xy$, temos a composição de funções

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r] \arrow[dr] & u \arrow[r] & f(u,v) \\
y \arrow[ur] \arrow[r] & v \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= y + (1+u)e^{u+2v} \cdot 2x + 2u\, e^{u+2v} \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + (1+u)e^{u+2v} \cdot 2y + 2u\, e^{u+2v} \cdot x$$

No ponto $(x,y) = (2,-1)$:

$$(x,y) = (2,-1) \Rightarrow (u,v) = (5,-2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,-1) = -1 + 6e \cdot 4 + 10e(-1) = 14e - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,-1) = 2 + 6e \cdot (-2) + 10e \cdot 2 = 8e + 2$$

$$\nabla z(2,-1) = (14e-1, 8e+2)$$

b) $\text{vers}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{(-1,-3)}{\sqrt{10}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$$z'_{\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}}(2,-1) = \nabla z(2,-1) \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = (14e-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) - (8e+2)\frac{3}{\sqrt{10}} =$$

$$= \frac{-38e-5}{\sqrt{10}}$$

c) $\nabla z(2,-1) = (14e-1, 8e+2)$

4. $-2x^2+3y^2+z^2=1$

Seja $F(x,y,z) = -2x^2+3y^2+z^2-1$

$\nabla F(x,y,z) = (-4x, 6y, 2z)$

$\nabla F(-\sqrt{3},1,2) = (4\sqrt{3}, 6, 4)$

Equação do plano tangente:

$$4\sqrt{3}(x+\sqrt{3}) + 6(y-1) + 4(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sqrt{3}\,x + 6y + 4z = 2$$

Equação da recta normal:

$$\vec{n}(t) = (-\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\,t,\ 1+6t,\ 2+4t) \quad , t \in \mathbb{R}$$

5 a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 \qquad x \neq 0, y \neq 0$

Cálculo dos pontos críticos:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 = -y^3 \Leftrightarrow x = -y$$

$$4x^3 - 4x - 4\cancel{x} = 0$$

$$x^3 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\text{solução não considerada}} \quad \vee \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Assim, obtemos dois pontos críticos: $P_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $P_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Teste da 2ª derivada

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4$$

Têm-se valores iguais em P_1 e P_2:

$R = 20 \qquad S = 4 \qquad T = 20$

$$\left.\begin{array}{l} RT - S^2 = 20 \times 20 - 4^2 = 400 - 16 = 384 > 0 \\ R, T \text{ positivos} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

P_1 e P_2 são mínimos locais de f

b) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ $\qquad x, y, z$ positivas

$g(x,y,z) = x + 9y + 4z - 1$

Método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} 3x^2 = \lambda \\ 3y^2 = 9\lambda \\ 3z^2 = 4\lambda \\ x + 9y + 4z = 1 \end{cases}$$

$3x^2 = \frac{y^2}{3} = \frac{3}{4} z^2 \iff$

$y = \pm 3x \ \wedge \ z = \pm 2x$;

como x, y, z positivos, apenas interessa $y = 3x \ \wedge \ z = 2x$

Substituindo na equação do plano:

$x + 27x + 8x = 1 \iff x = \frac{1}{36}$

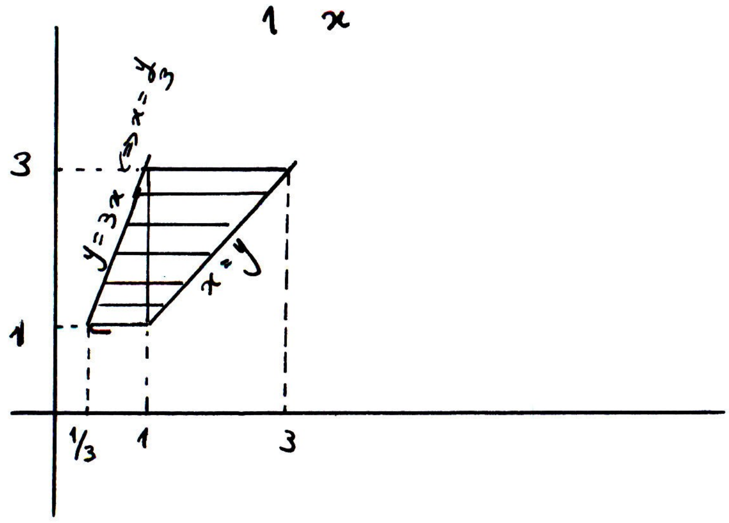
O ponto de mínimo de f sobre o plano é

$\left(\frac{1}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}\right) = \left(\frac{1}{36}; \frac{1}{12}, \frac{1}{18}\right)$, e portanto

o mínimo de f sobre o plano é $\frac{1}{36^3} + \frac{1}{12^3} + \frac{1}{18^3} = \frac{1}{6^4} =$

$= \frac{1}{1296}$

6. $$\int_{1/3}^{1}\int_{1}^{3x} e^{\frac{3x}{y}}\,dy\,dx + \int_{1}^{3}\int_{x}^{3} e^{\frac{3x}{y}}\,dy\,dx$$



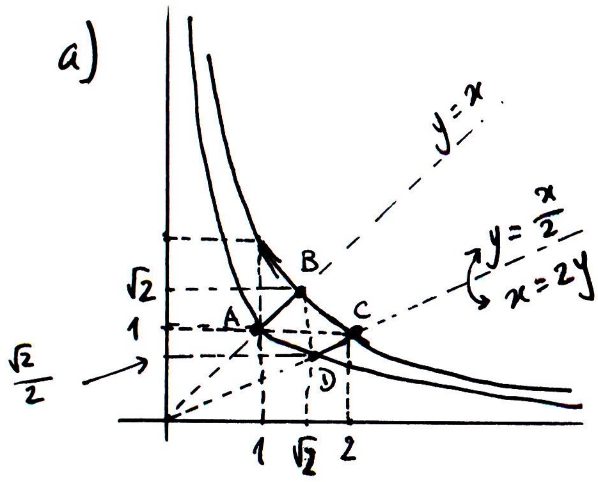
$$\int_{1}^{3}\int_{y/3}^{y} e^{\frac{3x}{y}}\,dx\,dy = \int_{1}^{3}\left[\frac{y}{3}\,e^{\frac{3x}{y}}\right]_{y/3}^{y} dy =$$

$$= \int_{1}^{3} \frac{y}{3}\left(e^{3}-e\right)dy = \left(e^{3}-e\right)\left[\frac{y^{2}}{6}\right]_{1}^{3} =$$

$$= \left(e^{3}-e\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{3}\left(e^{3}-e\right)$$

7. $\displaystyle\iint_A e^{xy}\,dx\,dy$

a)



Pontos de intersecção:

$A(1,1)$

$B:\ \frac{2}{x}=x \iff x^2=2:\ x=y=\sqrt{2}$

$C:\ \frac{2}{x}=\frac{x}{2} \iff x^2=4\ :\ x=2, y=1$

$D:\ \frac{1}{x}=\frac{x}{2} \iff x^2=2:\ x=\sqrt{2},\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\int_1^{\sqrt{2}}\int_{1/x}^{x} e^{xy}\,dy\,dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} e^{xy}\,dy\,dx$$

ou:
$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\int_{1/y}^{2y} e^{xy}\,dx\,dy+\int_1^{\sqrt{2}}\int_y^{\frac{2}{y}} e^{xy}\,dx\,dy$$

b) $u=\frac{y}{x}$, $v=xy$ $\quad \det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\\ y & x\end{vmatrix}=-2\frac{y}{x}=$

$=-2u$

$$\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{|-2u|}=\frac{1}{2u}$$

$y=\frac{x}{2} \iff \frac{y}{x}=\frac{1}{2} \iff u=\frac{1}{2}$

$y=x \iff u=1$

$$y = \frac{1}{x} \iff xy = 1 \iff v = 1$$

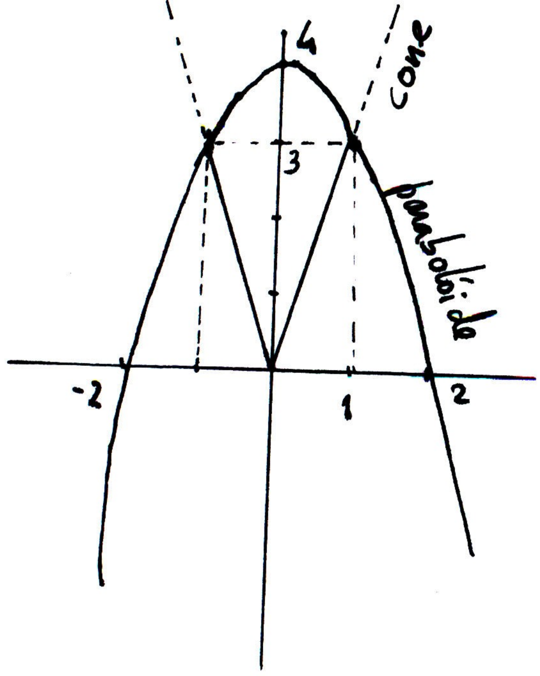
$$y = \frac{2}{x} \iff xy = 2 \iff v = 2$$

Assim, o integral pedido é

$$\int_{1/2}^{1} \int_{1}^{2} e^{v} \frac{1}{2u} \, dv \, du = \frac{1}{2}(e^{2} - e)\left(\log 1 - \log \frac{1}{2}\right) =$$

$$= (e^{2} - e) \log \sqrt{2}$$

8.



$\longleftarrow$ vista em corte longitudinal

Ponto de intersecção : $\begin{cases} z = 4 - r^2 \\ z = 3r \end{cases}$ $\qquad 4 - r^2 = 3r$

$r^2 - 3r + 4 = 0 \iff \underbrace{r = 1}_{\Downarrow \; z = 3} \vee \underbrace{r = -4}_{\text{solução não admissível}}$

Utilizando coordenadas cilíndricas:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{3r}^{4-r^2} z \, r \; dz \, dr \, d\theta = 2\pi \left[\frac{r^2}{12} - \frac{17}{8} r^4 + 4r^2 \right]_0^1 =$$

$$= 4\pi - \frac{\pi}{12}$$

Análise Matemática II E 2009-10 2º semestre

Exame de época normal (26 Junho 2010)

Respostas

1 (i) $y' = 2(1+t)(1+y^2)$

a) $1+y^2 \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, logo a equação não tem nenhuma solução de equilíbrio.

b) $\dfrac{y'}{1+y^2} = 2(1+t)$

$\arctan y = (1+t)^2 + C$

solução geral: $y(t) = \tan\left((1+t)^2 + C\right)$

$y(0)=1 \iff \tan(1+C) = 1 \iff 1+C = \dfrac{\pi}{4} \iff C = \dfrac{\pi}{4} - 1$

A solução pedida é $y(t) = \tan\left((1+t)^2 + \dfrac{\pi}{4} - 1\right)$

c) $y(0{,}2) \approx y_1$

$y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0)$ em que $f(t,y) = 2(1+t)(1+y^2)$

$y_1 = 1 + 0{,}2 \cdot 2(1+0)(1+1^2) = 1 + 0{,}2 \times 4 = 1{,}8$

$y(0{,}2) \approx 1{,}8$

1 (ii) $\begin{cases} xy' + 2y = e^x \\ y(1) = -1 \end{cases}$

Método de variação da constante:

$$xy' + 2y = 0$$

$$y' = -2\frac{y}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x}$$

$$\log y = -2\log x + c$$

$$y_H(x) = \frac{C}{x^2} \qquad ; \quad y(x) = \frac{C(x)}{x^2}$$

$$y'(x) = \frac{x^2 C'(x) - 2x\, C(x)}{x^4} = \frac{C'(x)}{x^2} - 2\frac{C(x)}{x^3}$$

$$x\,\frac{C'(x)}{x^2} \cancel{- 2x\,\frac{C(x)}{x^3}} \cancel{+ 2\,\frac{C(x)}{x^2}} = e^x$$

$$C'(x) = x\,e^x$$

$$C(x) = (x-1)\,e^x + C$$

Solução geral : $y(x) = \dfrac{C}{x^2} + \dfrac{x-1}{x^2}\,e^x$

$y(1) = -1 \Rightarrow C = -1$

A solução pedida é $y(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x-1}{x^2}\,e^x$