Análise Matemática II E

Exame de época normal 26 de Junho de 2010

Deve mudar de folha sempre que mudar de pergunta. Deve apresentar os seus cálculos, argumentos e justificações, e apresentar os resultados na forma mais simplificada possível.

1. (i) Considere a equação diferencial

$$y' = 2(1+t)(1+y^2).$$

   a) Verifique se a equação tem soluções de equilíbrio (ou seja, soluções constantes). [0,5]

   b) Determine a solução $y(t)$ da equação que verifica a condição inicial $y(0) = 1$. [1,5]

   c) Obtenha um valor aproximado de $y(0,2)$, utilizando o método de Euler com passo $h = 0,2$. [1]

   (ii) Resolva o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} xy' + 2y = e^x \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

   (Recorde que $\int u'v = uv - \int uv'$). [1,5]

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(\cos x - \sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Estude a continuidade da função. [1]

b) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(0,0)$. [1]

c) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$. [1]

3. Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, cujo gradiente é $\nabla f(u,v) = ((1+u)\,e^{u+2v},\ 2u\,e^{u+2v})$, e $z:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por
$$z(x,y) = xy + f(x^2+y^2,\ xy).$$

   a) Determine o gradiente de z no ponto$(x,y)=(2,-1)$. [1,5]

   b) Determine a derivada direccional de z no ponto $(2,-1)$ segundo a direcção do vector $\mathbf{a}=(-1,-3)$. [0,5]

   c) Determine a direcção de máximo crescimento de z a partir do ponto $(2,-1)$. [0,5]

4. Determine o plano tangente e a recta normal à superfície $-2x^2+3y^2+z^2=1$ no ponto $(-\sqrt{3},1,2)$. [1]

5. a) Estude quanto a máximos relativos, mínimos relativos e pontos sela a função $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$, com $x\neq 0,\ y\neq 0$. [1,5]

   b) Calcule o mínimo da função $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$, x,y,z positivos, sobre o plano $x+9y+4z=1$. [1,5]

6. Inverta a ordem de integração e calcule o seguinte integral:
$$\int_{1/3}^{1}\int_{1}^{3x} e^{\frac{3x}{y}}\,dy\,dx + \int_{1}^{3}\int_{x}^{3} e^{\frac{3x}{y}}\,dy\,dx.$$
[2]

7. Considere o integral $\displaystyle\int\int_A e^{xy}\,dx\,dy$, em que A é a região no 1º quadrante limitada pelas linhas $y=\dfrac{x}{2}$, $y=x$, $y=\dfrac{1}{x}$ e $y=\dfrac{2}{x}$.

   a) Escreva o integral sob a forma de integral iterado.
   ATENÇÃO: Não calcule esse integral. [0,5]

b) Utilize a mudança de variáveis $u = \dfrac{y}{x}$, $v = xy$ para calcular o integral. [1,5]

8. Calcule $\displaystyle\int\int\int_D z\,dV$, em que D é o sólido limitado superiormente pela superfície $z = 4 - (x^2 + y^2)$ e inferiormente pela superfície $z^2 = 9(x^2 + y^2)$. [2]

   (Nota: utilize o sistema de coordenadas que preferir.
   Note ainda que $\sqrt{225} = 15$).