2010/11 1º semestre

exame de época normal 10 de Janeiro de 2011

Respostas

1 (i) $y' = \dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$

a) Não tem

b) $y y' = \dfrac{x^2}{1+x^3}$

$\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{1}{3} \log(1+x^3) + C$

solução geral: $y(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{3} \log(1+x^3) + C}$

$-2 = y(0) \iff -2 = -\sqrt{\frac{2}{3} \log 1 + C} \iff -2 = -\sqrt{C} \iff C = 4$

Solução pedida: $y(x) = -\sqrt{\frac{2}{3} \log(1+x^3) + 4}$

c) O valor aproximado pedido é $y_2 \approx y(0,2)$

$y_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0) = -2 + 0,1 \times \dfrac{0^2}{-2} = -2$

$y_2 = y_1 + h\, f(x_1, y_1) = -2 + 0,1 \times f(0,1\,;\,-2) =$

$= -2 + 0,1 \times \dfrac{0,1^2}{-2(1+0,1^3)} = -2 + \dfrac{0,001}{-2 \times 1,001} =$

$= -2 - \dfrac{0,001}{2,002}$

(ii) $\begin{cases} xy' + 2y = \sin x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

m.v.c. : $y_H' = -2\dfrac{y_H}{x}$ $\qquad \dfrac{y_H'}{y_H} = -\dfrac{2}{x}$

$\log y_H = -2\log x + C \qquad y_H = \dfrac{C}{x^2}$

$y(x) = \dfrac{C(x)}{x^2} \qquad y'(x) = \dfrac{x^2 C'(x) - 2x\,C(x)}{x^4}$

Substituindo na equação:

$$x\,\frac{x^2 C'(x) - 2x\,C(x)}{x^4} + 2\,\frac{C(x)}{x^2} = \sin x$$

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{2\,C(x)}{x^2} + 2\,\frac{C(x)}{x^2} = \sin x$$

$$C'(x) = x\sin x$$

$$C(x) = -x\cos x + \int \cos x = -x\cos x + \sin x + C$$

Solução geral: $y(x) = \dfrac{C}{x^2} + \dfrac{\sin x}{x^2} - \dfrac{\cos x}{x}$

$$0 = y(\pi) \iff 0 = \frac{C}{\pi^2} - \frac{\cos \pi}{\pi} \iff 0 = \frac{C}{\pi^2} + \frac{1}{\pi} \iff$$

$\iff C = -\pi$

Solução pedida: $y(x) = \dfrac{\sin x}{x^2} - \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\pi}{x^2}$

2. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{xy-2x-y} & \text{se } y\neq \dfrac{2x}{x-1}\\[2ex] 0 & \text{se } y=\dfrac{2x}{x-1}\end{cases}$$

a) Seja $(x_0,y_0)$ um ponto tal que $y_0=\dfrac{2x_0}{x_0-1}$, com $x_0\neq 0$ (e portanto também $y_0\neq 0$)

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{xy}{xy-2x-y}=\infty$, $f$ não é contínua em nenhum ponto desta forma.

No ponto $(0,0)$, o limite do quociente que define $f$ em torno de $(0,0)$ é uma indeterminação (do tipo "$\frac{0}{0}$").

Cálculo dos limites direccionais:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{xy}{xy-2x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{mx^2-2x-mx}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{mx-(2+m)}=$$

$=0$, excepto se $m=-2$, em que temos indeterminação.

Cálculo do limite direccional segundo a recta $y=-2x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{-2x^2-2x+2x}=\lim_{x\to 0} 1=1$$

Como o limite segundo esta recta difere dos restantes, conclui-se que $f$ também não é contínua no ponto $(0,0)$.

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$

c) Como $f$ não é contínua em $(0,0)$, não é diferenciável em $(0,0)$.

3. $f(x,y)$ , $g(u,v) = f(x,y)$ $\begin{cases} x = uv \\ y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases}$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} v + \frac{\partial f}{\partial y} u$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} u - \frac{\partial f}{\partial y} v$$

a) $(u_0, v_0) = (2, -1) \implies (x_0, y_0) = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(2,-1) = -\frac{\partial f}{\partial x}\left(-2, \frac{3}{2}\right) + 2\frac{\partial f}{\partial y}\left(-2, \frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(2,-1) = 2\frac{\partial f}{\partial x}\left(-2, \frac{3}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(-2, \frac{3}{2}\right)$$

b) $$a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = a\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 v^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 u^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} vu\right] +$$

$$+ b\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 u^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 v^2 - 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} uv\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (av^2 + bu^2) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (au^2 + bv^2) +$$

$$+ 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} uv (a - b)$$

Se $a=b$, obtém-se

$$a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = 2a\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(u^2+v^2) + 2a\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(u^2+v^2) =$$

$$= 2a\,\|\nabla f(x,y)\|^2\,(u^2+v^2) =$$

$$= 4a\,(u^2+v^2)$$

e portanto os valores de $a$ e $b$ pedidos são $a=b=\frac{1}{4}$

4. $S_1 : \quad x^2 + \cancel{z}y^2 + 2z^2 = 4$ $\qquad S_2 : \quad z = e^{x-y}$

a) $S_1$ é um elipsóide de revolução (em torno do eixo $z$), de semi-eixos $\frac{1}{2}$ , $\frac{1}{2}$ , $\sqrt{2}$ .

b) $D_{\vec{u}}\, z\,(1,1)$ , $\vec{v} = \text{vers}\, \vec{u} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{(\sqrt{3}, -1)}{\sqrt{3+1}} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\right.$

$$D_{\vec{v}}\, z\,(1,1) = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\partial z}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{x-y}\Big|_{(1,1)}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-e^{(x-y)}\right)\Big|_{(1,1)}\left(-\right.$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

A direcção de máximo decrescimento de $z$ no ponto $(1,1)$ é a direcção do vector $-\nabla z\,(1,1) = -(1,-1) = (-1, 1)$

c) $\Pi_1$ - plano tangente à superfície $S_1$ no ponto $(1,1,1)$ :

$S_1 : \quad \nabla F_1 = (2x, 2y, 4z) \qquad \nabla F(1,1,1) = (2,2,4)$

$2(x-1) + 2(y-1) + 4(z-1) = 0 \iff 2x + 2y + 4z = 8 \iff$

$\iff x + y + 2z = 4$

$\Pi_2$ - plano tangente à superfície $S_2$ no ponto $(1,1,1)$:

$S_2 : \quad \cancel{\nabla F_2} \quad z - 1 = \dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)(x-1) + \dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)(y-1) \iff$

$\iff z - 1 = x - 1 - (y-1) \iff x - y - z = -1$

A recta tangente é a intersecção dos dois planos tangentes:

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x-y-z=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=3x-2 \\ z=-2x+3 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

equações paramétricas:

$$\begin{cases} x=t \\ y=3t-2 \\ z=-2t+3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

5 a) $f(x,y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3 - 3x^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -4y + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

$1 - x^2 = 0$ $\quad x = \pm 1$

$y(y^2 - 1) = 0$ $\quad y = 0 \vee y = \pm 1$

Assim, temos 6 pontos críticos:

$P_1(1,0)$ $\quad P_2(-1,0)$ $\quad P_3(1,1)$ $\quad P_4(1,-1)$ $\quad P_5(-1,1)$ $\quad P_6(-1,-1)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4 + 12y^2$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

$P_1$: $RS - T^2 = 24 > 0$, $R < 0$ : ponto de máximo local

$P_2$: $RS - T^2 = -24 < 0$ : ponto sela

$P_3$: $RS - T^2 = -48 < 0$ : ponto sela

$P_4$: $RS - T^2 = -48 < 0$ : ponto sela

$P_5$: $RS - T^2 = 48 > 0$, $R > 0$ : ponto de mínimo local

$P_6$: $RS - T^2 = 48 > 0$, $R > 0$ : ponto de mínimo local

b) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ $\quad g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$\nabla f = (1, -2, 2)$ $\quad \nabla g = (2x, 2y, 2z)$

$$\begin{cases} 1 = \lambda 2x \\ -2 = \lambda 2y \\ 2 = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$2x = -\dfrac{2y}{2} = \dfrac{2z}{2} \iff 2x = -y = z$

$x^2 + 4x^2 + 4x^2 = 1 \iff x^2 = \dfrac{1}{9} \iff x = \pm \dfrac{1}{3}$

[redacted] 9 - (10.1.11)

O sistema dos multiplicadores de Lagrange tem duas soluções:

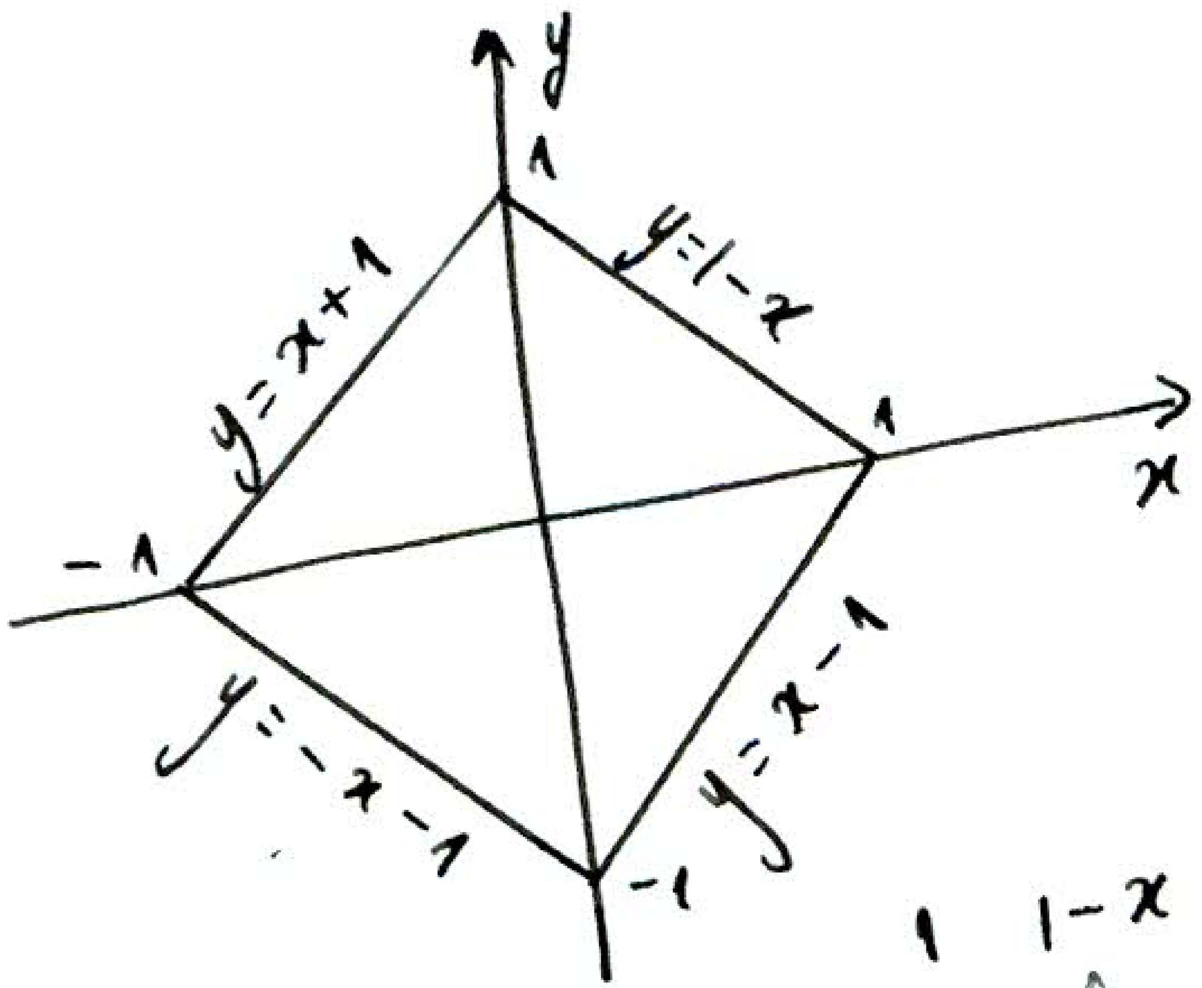
$$P_1\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \qquad P_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$f(P_1) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 3$$

$$f(P_2) = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -3$$

Assim, o máximo de $f$ sobre a esfera é $3$ (atingido no ponto $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$), e o mínimo é $-3$ (atingido no ponto $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$).

$$\iint_D e^{x+y}\, dA \quad , \quad D = \{(x,y)$$

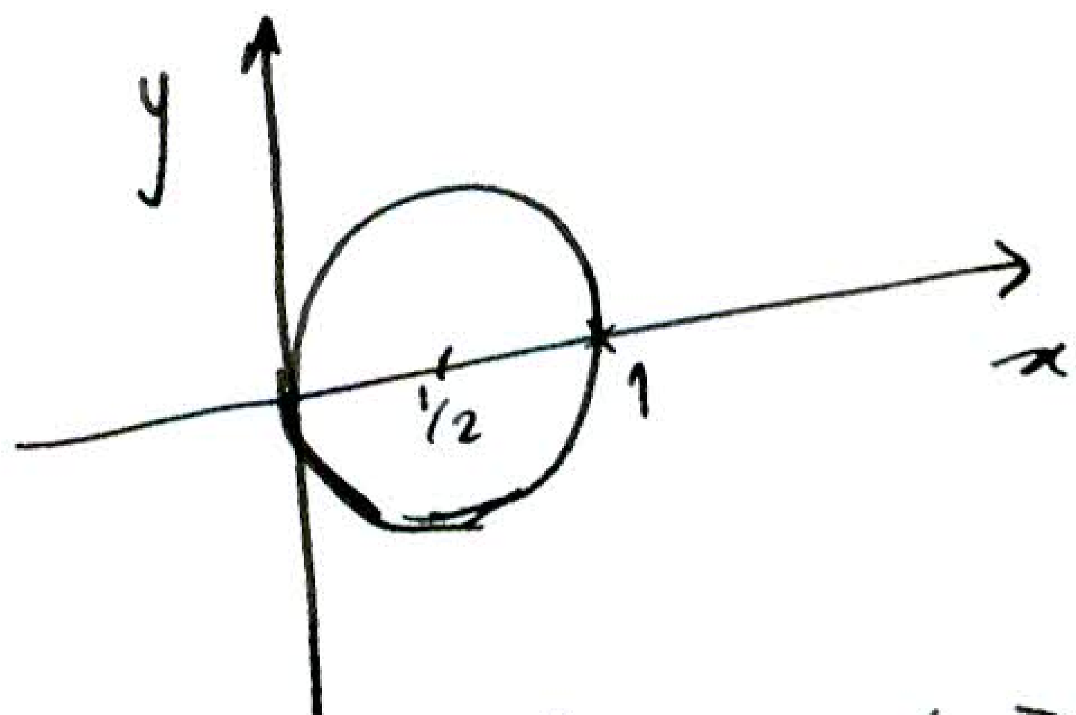



$$= \int_{-1}^{0}\int_{-x-1}^{x+1} e^{x+y}\, dy\, dx + \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{1-x} e^{x+y}\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left[e^{x+y}\right]_{-x-1}^{x+1} dx + \int_{0}^{1} \left[e^{x+y}\right]_{x-1}^{1-x} dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(e^{2x+1} - e^{-1}\right) dx + \int_{0}^{1} \left(e - e^{2x-1}\right) dx =$$

$$= e - \frac{1}{e}$$




7. $\iint_D x\, dA$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \iff x^2 - x + y^2 = 0 \iff x^2 + y^2 = x$$

em coordenadas polares : $r^2 = r\cos\theta \iff r = \cos\theta$

$$\iint_D x \, dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0 r\cos\theta \, r \, dr\, d\theta = \frac{\pi}{8}$$

cálculo auxiliar para primitivar $\cos^4\theta$:

$$\cos^4\theta = (\cos^2\theta)^2 = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\,\frac{1+\cos 4\theta}{2} =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$$

8. Utilizando coordenadas cilíndricas (por exemplo) tem-se

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{r} r \, dz\, dr\, d\theta = \frac{32}{9}$$